Deutsche Physikalische Gesellschaft - Fachverband Didaktik der Physik

Beiitrag aus der Reihe:

Karl-Heinz Lotze, Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 5

Naturphänomene und Astronomie

ISBN 3 - 7896 - 0666 - 9

Verlag Palm & Enke, Erlangen und Jena 2002

Karl-Heinz Lotze

Das Weltmodell der Newtonschen Kosmologie

Gegenstand dieses Aufsatzes ist die Newtonsche Kosmologie als didaktisches Hilfsmittel. Es wird begründet, dass die Expansion des Universums nicht im Widerspruch zu dem rein anziehenden Charakter der Schwerkraft steht und dass Maßstäbe existieren können, die von dieser Expansion unbeeinflusst bleiben. Auch auf die Grenzen der Newtonschen Kosmologie wird hingewiesen.

1 Einleitung

Die globale Architektur und Dynamik des Universums wird durch die Schwerkraft der in ihm vorhandenen Massen bestimmt. Daher verstehen wir unter einem kosmologischen Modell eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, die das Kernstück der besten heute verfügbaren Gravitationstheorie sind. Erst nachdem diese Gleichungen auf kosmologische Fragen angewandt worden waren, entdeckte man (Milne, McCrea 1934), dass man auf der Grundlage der Newtonschen Dynamik zu fast den gleichen mechanischen Aussagen gelangen kann wie in der relativistischen Kosmologie. Dies bedeutet weder, dass Newton der Entdecker des expandierenden Universums hätte sein können, noch, dass wir in der Kosmologie auf die Einsteinsche Theorie verzichten dürften. Der Newtonsche Zugang hilft uns lediglich, das Universum in bekannten Begriffen wie „Kraft“ und „Energie“ zu verstehen - in der Relativitätstheorie verlieren diese Begriffe jedoch viel von ihrer klassischen Bedeutung. In der Kosmologie als forschender Disziplin gibt es schließlich überhaupt keinen Grund, hinter die Einsteinsche Theorie zurückzugehen.

Unter didaktischen Gesichtspunkten jedoch kann die Newtonsche Kosmologie ein nützliches Instrument sein, um ein vertieftes Verständnis der Friedmanschen Weltmodelle zu erreichen, welche die bekanntesten und mit der Beobachtung am besten verglichenen kosmologischen Modelle sind. Da der Lernende, wenn er sich der Kosmologie zuwendet, in der Regel bereits ein intuitives Verständnis für die Newtonsche Dynamik erworben hat, werden oft Fragen gestellt, die bei der Beschäftigung mit den abstrakteren Konzepten der relativistischen Kosmologie nicht sogleich in den Sinn kommen. Die beiden am häufigsten gestellten Fragen sind:

- Wie verträgt sich der stets anziehende Charakter der Schwerkraft mit einer Expansion des Universums?
- Ist es nicht so, dass von der Expansion des Universums auch die Maßstäbe ergriffen werden, mit denen man diese Expansion feststellen möchte? Beide Fragen wollen wir in diesem Aufsatz beantworten.

2 Die Expansion des Universums

Grundlage für eine erfolgreiche Reproduktion der Friedmanschen Weltmodelle im Rahmen der Newtonschen Theorie ist die hochgradige Symmetrie, die in der Isotropie und Homogenität der messbaren Eigenschaften der das Universum erfüllenden Materie zum Ausdruck kommt (kosmologisches Prinzip, [1]).
Wir denken uns irgendwo im Universum eine Kugel, deren Radius im Vergleich mit den Abständen untereinander benachbarter Galaxien groß, ansonsten aber beliebig ist (Abb. 1).

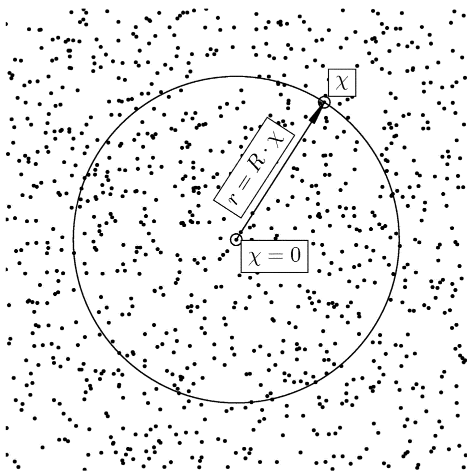

Abb. 1: Die von der gedachten Kugel umschlossenen Galaxien (durch Punkte gekennzeichnet) repräsentieren das homogene Universum.

Dann umschließt ihre Oberfläche so viele Galaxien, dass wir uns diese wie die Atome eines Gases vorstellen können. Das „Galaxien-Gas" innerhalb der Kugel ist eine dem unbegrenzten Universum entnommene repräsentative Probe. Das gilt insbesondere auch für seine Massendichte μ. Von dieser verlangt das kosmologische Prinzip, dass sie zu jedem Zeitpunkt räumlich konstant ist, aber es lässt zu, dass sie sich mit der Zeit ändert. Es erlaubt auch, dass wir den Mittelpunkt der Kugel in das Milchstraßensystem legen. Dies bedeutet jedoch nicht, dass wir uns eine Vorzugsstellung im Universum anmaßen würden.
Beginnend mit $\chi = 0$ im Zentrum heften wir jeder Galaxie eine Koordinate χ an, so dass zu einem bestimmten Zeitpunkt zunehmende Werte von χ größere Abstände vom Kugelmittelpunkt anzeigen.
Bei einer Ausdehnung der Kugeln, bei der eine Galaxie auf einer Oberfläche dauernd auf dieser Oberfläche bleibt, behält jede Galaxie die ihr einmal zugewiesene Koordinate χ bei („mitbewegte Koordinate"). Die Ausdehnung wird durch ei-

nen universellen Maßstabsfaktor *R(t)* beschrieben, so dass die Abstände *r(t)* der Galaxien vom Kugelmittelpunkt gemäß

$$r(t) = R(t) \cdot \chi \tag{1}$$

mit der Zeit anwachsen. Der Abstand *r* erhält seine Längendimension, etwa ausgedrückt in Parsec oder Lichtjahren, durch diesen Maßstabsfaktor; die mitbewegte Koordinate χ ist nur eine dimensionslose „Marke“. Aus (1) folgt unmittelbar der Geschwindigkeits-Entfernungs-Zusammenhang [1]

$$v(t) = \dot{r}(t) = \dot{R}(t) \cdot \chi = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \cdot r(t) \equiv H(t) \cdot r(t), \tag{2}$$

worin - wie üblich - der Punkt die Ableitung nach der Zeit bedeutet. Dieser Zusammenhang besagt: Zu jedem festgesetzten Zeitpunkt bewegt sich von irgend zwei Galaxien diejenige mit der größeren Geschwindigkeit von uns weg, die *zu diesem Zeitpunkt* den größeren Abstand von uns hat. Der im allgemeinen zeitabhängige Proportionalitätsfaktor

$$H(t) \equiv \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \tag{3}$$

ist die Hubble-Zahl. Wenn wir dafür sorgen, dass unsere Kugel so klein ist, dass sogar für eine Galaxie an ihrer Oberfläche die „Flucht“-Geschwindigkeit (2) klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, treten überhaupt keine relativistischen Geschwindigkeiten auf, und die Newtonsche Mechanik ist anwendbar. Um zu erfahren, wie sich die Fluchtgeschwindigkeit *einer* Galaxie im Lauf der Zeit *ändert*, müssen wir deren Beschleunigung *a(t)* berechnen.
Aus (2) folgt

$$a(t) = \dot{v}(t) = (H^2 + \dot{H}) \cdot r(t) \ . \tag{4}$$

Setzen wir zur Abkürzung $f(t) \equiv H^2 + \dot{H}$, so ist die Bewegung einer Galaxie mit der Masse *m* so, als ob im Abstand *r* vom Kugelmittelpunkt die Kraft

$$F = mf(t) \cdot r \tag{5}$$

wirkte. Das Vorzeichen von *f (t)* entscheidet darüber, ob diese Kraft anziehend oder abstoßend ist. Wäre die Hubble-Zahl jene Hubble-*Konstante* ($\dot{H} = 0$), als die sie fälschlicherweise oft bezeichnet wird, hätten wir $f = H^2 = const > 0$, und die Kraft *F* wäre abstoßend. Im Allgemeinen lässt $f(t) = H^2 + \dot{H}$ jedoch eine Expansion (*H>0*) bei gleichzeitigem Vorhandensein einer anziehenden Kraft zu. Das Kriterium dafür ist offenbar

$$\dot{H} < -H^2 \quad .$$

Dann wird *f (t)*<0, und die Beschleunigung (4) ist eine Verzögerung. Zu der Kraft (5) gehört das Potential [2]

$$\phi = -\frac{m}{2} f(t) \cdot r^2 ,$$

das aber wegen der Zeitabhängigkeit von f keine Erhaltungsgröße zusammen mit der kinetischen Energie der Galaxie bilden kann. Vielmehr gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2 + \phi\right) = -\frac{m}{2}\dot{f}(t) \cdot r^2 \quad . \tag{6}$$

3 Das kosmologische Modell der Newtonschen Dynamik

Wir halten an unserer Behauptung fest, dass die stets anziehende Schwerkraft die einzige Kraft ist, welche die großräumige Bewegung der Galaxien bestimmt. Aus dieser Annahme muss sich die Funktion *f(t)* berechnen lassen.

Zu diesem Zweck betrachten wir zuerst nur die Galaxien im Innern der Kugel mit dem Radius *r*. Ihre Gesamtmasse sei *M(r)*. Es ist eine bekannte Eigenschaft des $1/r^2$ -Kraftgesetzes [3], dass eine Galaxie an der Oberfläche so zum Zentrum der Kugel hingezogen wird, als ob die gesamte Masse *M(r)* in diesem Zentrum konzentriert wäre,

$$F = -G\frac{mM(r)}{r^2} \tag{7}$$

(G: Newtonsche Gravitationskonstante).

Wären nun die Galaxien *außerhalb* der Kugel lediglich in einer Kugelschale gleichmäßig angeordnet, die unsere Kugel umgibt, so wirkte auf eine Galaxie irgendwo im Innern dieser Kugelschale keine Kraft [3]. Ist die Kugel jedoch von einem

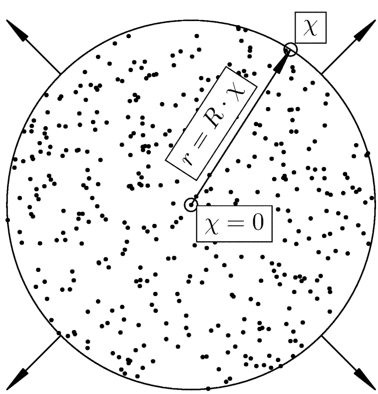

Abb. 2: Die Kugel expandiert in den leeren Euklidischen Raum hinein, wobei eine sich einmal auf ihrer Oberfläche befindende Galaxie diese nicht verläßt.

gleichmäßig mit Materie erfüllten, unbegrenzten Universum umgeben, das weder ein Zentrum noch einen Rand hat, so ist - egal in welchem Punkt - die dort resultierende Gravitationskraft unbestimmt. Aus diesem Grund fassen wir nicht nur die Eigenschaften des „Galaxien-Gases" im Innern der Kugel, sondern die expandierende Kugel selbst als Repräsentanten des homogenen Universums auf. Dann dürfen wir uns alle Galaxien in der Welt fortdenken, die sich außerhalb unserer Kugel befinden, so dass diese in einen leeren Euklidischen Raum hineinexpandiert (Abb. 2).

Um (7) mit (5) vergleichen zu können, führen wir die Massendichte

$$\mu = \frac{M(r)}{\frac{4\pi}{3} r^3}$$

in (7) ein und lesen

$$f(t) = -\frac{4\pi}{3} G\mu(t) < 0$$

ab. Das negative Vorzeichen weist dabei auf den anziehenden, die Expansion verzögernden Charakter der Schwerkraft hin.

Da *f(t)* im wesentlichen durch die Massendichte μ bestimmt ist, können wir (6) doch noch in die Form eines Erhaltungssatzes bringen. Die Anzahl der Galaxien und damit die Gesamtmasse *M(r)* innerhalb der Kugel ändert sich nämlich während der Expansion nicht. Dafür muss die Dichte gemäß

$$\mu(t) = \left[\frac{r_0}{r(t)}\right]^3 \cdot \mu_0 = \left[\frac{R_0}{R(t)}\right]^3 \mu_0 \tag{8}$$

abnehmen. Der Index $_0$ bezieht sich auf einen bestimmten Zeitpunkt, etwa den heutigen.

Damit wird aus (6) der Erhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2} v^2 + U\right) = 0$$

mit dem Potential

$$U = \phi - 2\pi G m \mu(t) r^2 = -\frac{4\pi}{3} m G \mu(t) r^2 \; .$$

Für eine bestimmte Galaxie mit der Masse *m* und dem Abstand *r* vom Kugelmittelpunkt ist also die Energie

$$E = \frac{m}{2} v^2 - \frac{4\pi}{3} m G \mu(t) r^2 \tag{9}$$

eine Erhaltungsgröße ihrer Bewegung. Die Konstante E ist dabei eine „individuelle Konstante", da sie von den Charakteristika m und χ einer Galaxie abhängt. Fügen wir nämlich (2) und (1) in (9) ein, erhalten wir

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi}{3} G\mu(t) R^2 = \frac{2}{m}\frac{E}{\chi^2} \quad .$$

Darin kommt auf der linken Seite nur noch der universelle Maßstabsfaktor *R(t)* vor. Also muss auch die rechte Seite eine universelle Konstante sein, die wir ε nennen wollen. Dann ist

$$E = \frac{m}{2}\varepsilon\chi^2$$

und

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi}{3} G\mu(t) R^2 = \varepsilon \quad . \tag{10}$$

Die letzte Gleichung ist die berühmte *Friedman-Gleichung*, in der die Größe unserer Kugel keine Rolle mehr spielt.
Es ist nun sehr instruktiv, in (9) die individuelle Konstante E durch das universelle ε und χ durch *r/R* zu ersetzen. Dann können wir nämlich die Fluchtbewegung der Galaxien unter dem verzögernden Einfluss ihrer gegenseitigen Anziehung durch

$$\frac{m}{2} v^2 + U_{eff} = 0 \tag{11}$$

mit dem *effektiven Potential*

$$U_{eff}(r,t) = -\frac{m}{2}\left[\frac{8\pi}{3} G\mu(t) + \frac{\varepsilon}{R^2(t)}\right] r^2 \tag{12}$$

beschreiben. *Es ist aber* (11) *nichts weiter als der ins Quadrat erhobene Geschwindigkeits-Entfernungs-Zusammenhang* (2). Daraus können wir die Hubble-Zahl direkt ablesen:

$$H(t) = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G\mu(t) + \frac{\varepsilon}{R^2(t)}} \quad .$$

Das effektive Potential (12) ist, *zu einem festen Zeitpunkt betrachtet*, das eines harmonischen Oszillators mit negativer Kraftkonstante [4]! Selbst negative Werte von ε können das Vorzeichen von U_{eff} nicht umkehren. Für $\varepsilon < 0$ muss nämlich stets:

$$|\varepsilon| < \frac{8\pi}{3} G\mu(t) R^2$$

gelten, da das Quadrat der reellen Größe $\dot{R}$ in (10) nicht negativ werden kann.

4 Die Friedman-Gleichung

Wenn wir die Friedman-Gleichung (10) mit Hilfe von (8) in der Form

$$\dot{R}^2 - \frac{8\pi}{3} G\mu_0 R_0^3 \cdot \frac{1}{R} = \varepsilon \tag{13}$$

schreiben, wird besonders deutlich, dass die Expansion des Universums mit der Bewegung einer Rakete vergleichbar ist, die vertikal von der Oberfläche eines Himmelskörpers gestartet wird. Ob die Rakete den sie stets anziehenden Himmelskörper für immer verlassen kann oder zu ihm zurückkehren muss, hängt bekanntlich vom Verhältnis ihrer Anfangsgeschwindigkeit zur Entweichgeschwindigkeit ab. Ebensowenig wie die Gravitation die Ursache für den Raketenstart ist, ist sie die Ursache für die Expansion des Universums. Diese Expansion ist durch die *Anfangsbedingungen* der kosmischen Entwicklung bestimmt. Die anziehende Wirkung der Gravitation hat lediglich zur Folge, dass die einmal in Gang gesetzte Expansion dauernd verzögert wird.

Was ist nun der zur Entweichgeschwindigkeit analoge kritische Parameter, der darüber entscheidet, ob die Expansion zeitlich unbegrenzt andauern kann oder nicht? Es ist die kritische Dichte,

$$\mu_{krit} = \frac{3H}{8\pi G} \quad ,$$

die wir erhalten, wenn wir in (10) $\varepsilon = 0$ setzen und dabei (3) berücksichtigen. Durch die Zeitabhängigkeit von H wird auch μ_{krit} zeitabhängig. Das Verhältnis μ / μ_{krit} heißt üblicherweise Dichteparameter Ω. Seinen Wert zum heutigen Zeitpunkt bezeichnen wir mit Ω_0.

Damit nimmt die Friedman-Gleichung (13) die Gestalt

$$\dot{R}^2 - H_0^2 \Omega_0 R_0^3 \cdot \frac{1}{R} = \varepsilon \tag{14}$$

an, was speziell für den heutigen Zeitpunkt *($t=t_o$)*

$$H_0^2 R_0^2 (1 - \Omega_0) = \varepsilon \tag{15}$$

zur Folge hat. Diese Form der Gleichung lässt erkennen, warum den heutigen Werten von Hubble-Zahl (H_0) und Dichteparameter (Ω_0) das Hauptaugenmerk der beobachtenden Kosmologen gilt: H_0 und Ω_0 bestimmen den zeitlichen Verlauf der Expansion des Universums. Statt Lösungen der Friedman-Gleichung (14) anzugeben, was außer für $\varepsilon = 0$ recht kompliziert ist, diskutieren wir diese qualitativ. Dazu lesen wir (14) als „Energie“-Erhaltungssatz mit dem Friedman-“Potential“ (Abb. 3)

$$V_{Friedman} = -H_0^2 \Omega_0 R_0^3 \cdot \frac{1}{R} \tag{16}$$

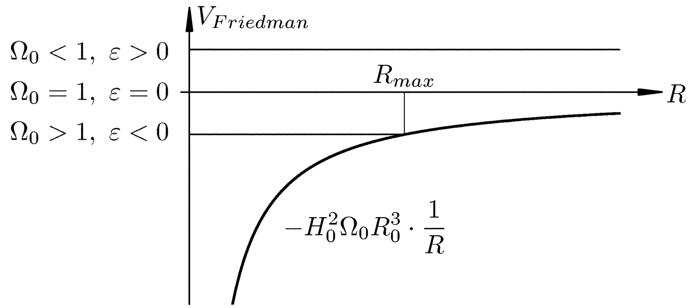

Abb. 3: Das Friedman-"Potential" (16). Das Universum kann so lange expandieren, wie die zur Abszisse parallele Gerade für $\varepsilon > 0, \varepsilon = 0$ oder $\varepsilon < 0$ oberhalb der Potentialkurve verläuft. Die Verringerung der Abstände zwischen jeder der Geraden und der Potentialkurve für wachsende R zeigt die Verzögerung der Expansion an.

Für $\Omega_0 > 1$ (entsprechend $\varepsilon < 0$ gemäß (15)) ist die mittlere Massendichte im Universum größer als ihr kritischer Wert und damit zu groß, als dass das Universum ewig expandieren könnte. Bei einem Höchstwert R_{max} des Maßstabsfaktors muss die Expansion in eine Kontraktion umkehren. Im kritischen ($\Omega = 1, \varepsilon = 0$) und unterkritischen ($\Omega_0 < 1, \varepsilon > 0$) Fall ist jedoch die Expansion stets zeitlich unbegrenzt. Die drei Fälle entsprechen der elliptischen, parabolischen bzw. hyperbolischen Bewegung einer Rakete.
Die Konstante ε hat die Dimension des Quadrates einer Geschwindigkeit. Ihre Universalität legt einen Zusammenhang mit der Lichtgeschwindigkeit nahe, die aber eine der Newtonschen Mechanik fremde Konstante ist. Die Allgemeine Relativitätstheorie führt ebenfalls auf die Friedman-Gleichung (14), wobei $\varepsilon = -kc^2$ mit $k = 0, \pm 1$ ist. Zwar tritt nun erwartungsgemäß die Lichtgeschwindigkeit auf, aber die Konstante *k* hat eine völlig neue Bedeutung. Sie charakterisiert Räume konstanter Krümmung [1]. Nur für *k=0* hat der Raum die Euklidische Geometrie, die der Newtonschen Dynamik für alle Werte von ε zugrunde liegt. Die globale Geometrie des Universums wird also nur im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie verständlich.

5 Globale Expansion und lokale Schwerefelder

Mit dem Potential (12) haben wir die globale Expansion des Universums auf ein Oszillatorpotential mit negativer Kraftkonstante abgebildet.
Wir untersuchen zuerst den Einfluss der Konstanten ε zu einem fest vorgegebenen Zeitpunkt. Mit einem negativen ε ist die durch (12) beschriebene Parabel gegenüber einer solchen mit $\varepsilon = 0$ gestaucht. Zu dem betrachteten Zeitpunkt

hat also jede Galaxie eine Geschwindigkeit, die kleiner ist als die, welche sie für ε=0 hätte. Dies ist verständlich, da ε<0 einer überkritischen Massendichte und damit starker Verzögerung entspricht. Für eine positive Konstante ε verläuft die Argumentation sinngemäß.

Nun fragen wir, wie sich (bei fest vorgegebenem ε) die Gestalt der Parabeln (12) im Laufe der Zeit ändert. Da mit einer Expansion ($R(t) > R_0$ für $t > t_0$) eine Verringerung der Massendichte gemäß (8) einhergeht, werden die Parabeln mit der Zeit flacher. Mit dem Abstand r als Abszissenparameter in Abb. 4a bedeutet dies: Vergleichen wir zu zwei verschiedenen Zeitpunkten die Geschwindigkeiten in einem festen Abstand r vom Kugelmittelpunkt, so sind dies nach (1) die Geschwindigkeiten zweier verschiedener Galaxien, die sich nacheinander in diesem Abstand befinden. Die nachfolgende Galaxie hat *dort* eine geringere Geschwindigkeit als die vorangehende. Wählen wir andererseits die mitbewegte Koordinate χ als Abszissenparameter in Abb. 4b, so richten wir unsere Aufmerksamkeit

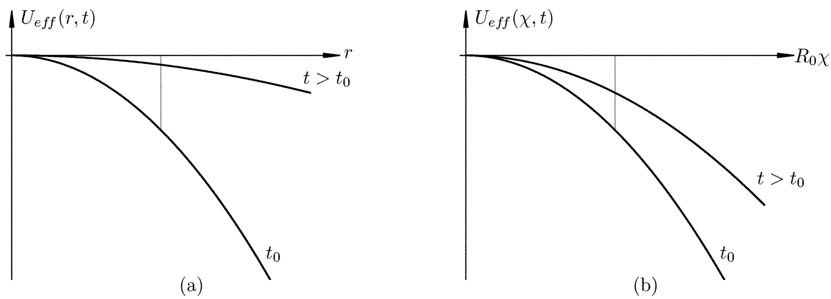

Abb. 4: Das effektive Potential (12) für *ε=0.* Die nach unten geöffneten Parabeln sind durch die Zeit parametrisiert. Es wurde angenommen, daß sich zwischen den Zeitpunkten t_0 und t der Maßstabsfaktor verdoppelt hat ($R = 2R_0$). Der Abstand zwischen der Abszisse und der jeweiligen Parabel ist nach (11) ein Maß für die kinetische Energie einer Galaxie. Da diese stets mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt und hier außerdem mit dem Quadrat der Entfernung, demonstriert jede Parabel den linearen Geschwindigkeits-Entfernungs-Zusammenhang zu „ihrer" Zeit. Zur unterschiedlichen Wahl der Abszissenachsen s. Text.

auf die Geschwindigkeit einer bestimmten Galaxie zu verschiedenen Zeitpunkten. Diese nimmt mit der Zeit und zunehmender Entfernung ab. Um also die verzögernde Wirkung der Schwerkraft zu erkennen, müssen wir Parabeln (12) zu aufeinanderfolgenden Zeitpunkten vergleichen.

Schließlich setzen wir die Diskussion von (12) für einen festen Zeitpunkt fort. Indem wir die das Universum erfüllende Materie durch eine räumlich konstante Massendichte μ beschrieben haben, haben wir bewusst einen Widerspruch zu der offensichtlich inhomogenen Massenverteilung in unserer näheren kosmischen Umgebung in Kauf genommen. Wir erweitern nun das kosmologische Modell dadurch, dass wir in das Zentrum unserer Kugel eine lokale Inhomogenität (Sonne, Galaxie, Galaxienhaufen) mit der Masse M_{inh} setzen. Dann wirkt auf eine Galaxie an der Kugeloberfläche außer dem durch die Massendichte μ beschriebenen globalen Schwerefeld auch das lokale dieser Inhomogenität. Dementsprechend fügen wir zu dem globalen effektiven Potential (12) das lokale Potential [4]

$$U_{lokal} = -G\frac{mM_{inh}}{r} \tag{17}$$

hinzu. Das Gesamtpotential

$$U_{ges} = -\frac{4\pi}{3}Gm\mu(t)r^2 - G\frac{mM_{inh}}{r},$$

das wir nur für $\varepsilon = 0$ diskutieren wollen, hat ein Maximum im Abstand

$$\hat{r} = \sqrt[3]{\frac{3}{8\pi}\frac{M_{inh}}{\mu}} = r_{\max} \tag{18}$$

vom Kugelmittelpunkt (Abb. 5). Zu kleineren Abständen hin *überwiegt* die lokale Anziehung und erst bei größeren die globale Expansion. Ein Beobachter im Zentrum der Kugel kann die Expansion nur anhand der Rotverschiebung von Galaxien nachweisen, die sich in *größerer* Entfernung als r_{max} befinden.

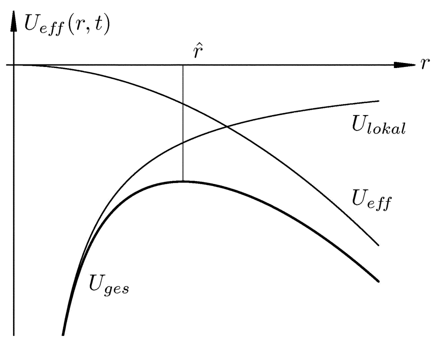

Abb. 5: Die Überlagerung des globalen effektiven Potentials (12) (für ε=0) mit dem Potential (17) einer lokalen Inhomogenität bei r=0. Das Gesamtpotential U_{ges}, hat ein Maximum in der Entfernung r_{max}. Die Expansion erfolgt erst für $r > r_{max}$.

Dies beantwortet die Frage nach Maßstäben, die an der globalen Expansion nicht teilnehmen.
Für eine angenommene heutige Massendichte $\mu_0 = 5 \cdot 10^{-31}\, gcm^{-3}$ sind in Tab. 1 einige Zahlenwerte für r_{max} zusammengestellt [1] (Diese Massendichte ist ein Zehntel der kritischen Dichte für eine Hubble-Zahl $H_0 = 55 km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$. In einem Universum mit der kritischen Dichte sind die r_{max}-Werte um den Faktor $1/\sqrt[3]{10}$ kleiner als in Tab. 1.) Die Schwerewirkung der Sonne dominiert also bis zu Entfernungen, die etwa 100mal so groß sind wie typische Abstände sonnennaher Sterne. Also kann sich beispielsweise der Erdbahnradius, der als Astronomische Einheit ein Standard-Längenmaß der Astronomie ist, aufgrund der globalen Expansion nicht verändern.
Für die Milchstraßengalaxie ist r_{max} größer als die Entfernung von *0,67 Mpc* zur Andromeda-Galaxie, die tatsächlich auch eine Blau- statt einer Rotverschiebung aufweist. Erst wenn wir die lokale Galaxiengruppe betrachten, wird der Abstand r_{max} kleiner als typische Entfernungen zu den nächsten Galaxienhaufen, die etwa 7 Mpc betragen. Man muss also die Bewegung von Galaxien*haufen* studieren, um Aussagen über die globale kosmische Expansion machen zu können.

Inhomogenität	M_{inh}/M_{sonne}	r_{max}
Sonne	1	250 pc
Milchstraßengalaxie	$1{,}8\ 10^{11}$	1,4 Mpc
Lokale Galaxiengruppe	$6{,}5\ 10^{11}$	2,1 Mpc

Tabelle 1: Aus (18) berechnete Abstände r_{max}, die für die jeweilige Inhomogenität festlegen, welche Objekte der kosmischen Expansion folgen

Da wir zur Beschreibung der globalen und lokalen Schwerefelder nur die Massendichte μ bzw. die Masse M_{inh} zur Verfügung haben, ist das Resultat (18) schon aus Dimensionsgründen zu erwarten. Über kosmologisch nennenswerte Zeiträume hinweg vergrößert sich der zu einer bestimmten Inhomogenität gehörende Abstand r_{max}, da im Laufe der Zeit die Massendichte abnimmt.
Die nach der Allgemeinen Relativitätstheorie strenge Behandlung der Einbettung lokaler Schwerefelder in die globale kosmische Expansion führt auf ein Resultat, das mit (18) - bis auf einen Faktor $\sqrt[3]{2}$ - übereinstimmt([5], [6] und [7]). Einen kurzen Überblick über Versuche, die Frage, was mit dem Universum expandiert, im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie zu beantworten, gibt Bonnor in [8].

Danksagung: Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr. H. Stephani (Jena) für wertvolle Hinweise beim Studium des Entwurfs zu diesem Aufsatz.

6 Literaturverzeichnis

[l] LOTZE, K.-H.: Elementarteilchen und Kosmologie im Unterricht: Anregungen und erste Erfahrungen. In: Didaktik der Physik - Vorträge der 60. Physikertagung, Jena 1996 (Red. K.-H. Lotze), S. 147-164
Kurzfassung in: Astronomie und Raumfahrt im Unterricht 34(1997)(2)18-21

[2] VOGT, H.: Außergalaktische Sternsysteme und Struktur der Welt im Großen-Akad. Verlagsges. Geest k Portig K.-G., Leipzig 1960

[3] KITTEL, CH., KNIGHT, W.D., RUDERMAN, *M.A. ET AL.*: Berkeley Physik-Kurs, Bd.1: Mechanik, Verlag F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1991

[4] SEXL, R. U., URBANTKE, H.K.: Gravitation und Kosmologie - Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie,
Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford 1995

[5] EINSTEIN, A., STRAUS, E. G.: The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual stars,
Rev. Mod. Phys. 17(1945)120

[6] STEPHANI, H.: Allgemeine Relativitätstheorie,
Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin 1990

[7] SCHÜCKING, E.: Das Schwarzschildsche Linienelement und die Expansion des Weltalls Zeitschrift für Physik 137(1954)595-603

[8] BONNOR, W.B.: What does expand with the universe,
Ann. Phys. (Leipzig) 9(2000) Spec. Issue, S. 31-33