

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 3

Rückblick und Perspektive

ISBN 3 - 7896 - 0513 - 1

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1993

Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle
genutzt werden. Auf der Homepage

www.solstice.de

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

Auflösungsgrenzen in der modernen Physik - Von der Augenschärfe bis zur Bestimmung subnuklearer Strukturen

Vorbemerkung

Unter Benutzung wellenoptischer Analogien und einfacher Handversuche werden die Auflösungsgrenzen von der Augenschärfe bis zur Bestimmung subnuklearer Strukturen diskutiert. Hierbei sollen Zusammenhänge aufgezeigt und auch entsprechende Teile der modernen Physik elementarisiert dargestellt werden. Dabei werden verschiedene Entwicklungen der Physik angesprochen, die in den letzten zwei Jahrzehnten mit Nobelpreisen ausgezeichnet wurden. Der so aufbereitete Stoff könnte im Hochschul-Grundstudium und in großen Teilen auch im Schulunterricht in der Sekundarstufe 2 eingesetzt werden.

Übersicht und Einführung

- a) Das **Auflösungsvermögen** eines optischen Gerätes ist bekanntlich die Fähigkeit, zwei eng benachbarte Objekteinheiten als deutlich getrennte Bildeinheiten wiederzugeben. Die **Grenze** der Auflösung wird in der Optik z.B. durch den Sehwinkel γ gekennzeichnet, den zwei Objektpunkte P_1, P_2 besitzen müssen, um im Bild als getrennte Punkte erkannt zu werden.
- b) Ausgehend von der Auflösung optisch **abgebildeter Strukturen**, wollen wir zunächst, den Begriff der Auflösung klären und die beugungsbedingten Grenzen bei Abbildungen veranschaulichen.
- c) Andererseits lassen sich Strukturen nicht nur durch Abbildung, sondern auch **direkt** aus **Beugungs-** und **Streu-Experimenten** bestimmen, was zunächst anhand von Beugungsversuchen mit Laserlicht an bekannten Objektstrukturen oder auch durch subjektiv visuelle Beobachtung von Beugungsmustern an photographisch hergestellten Blendsätzen verdeutlicht wird. Bei allen Beugungs- und Streuexperimenten gelten aber die gleichen Auflösungs-Beschränkungen wie bei der beugungsbegrenzten Abbildung.
- d) Ferner betrachten wir die Auflösung **atomarer** und **subatomarer Strukturen**, z.B. die elastische und unelastisch Elektronen-Streuung an Atomen, die Teilchenstreuung an Atomkernen und auch an subnuklearen Teilchen in der modernen Hochenergiephysik. - Jeder **Teilchen-Strahlung** ist eine **Materiewelle** mit einer Wellenlänge $\lambda_M = h/p$ zuzuordnen, wobei $p = m \cdot v$ der Impuls der Teilchen ist. Das bedingt bei allen Streuversuchen ebenfalls eine beugungsbegrenzte Auflösung, die entscheidend vom Impuls und damit von der Energie der Teilchen abhängt.
- e) Wir werden sehen, daß sich bezüglich der Auflösung in allen Bereichen der Physik die gleichen **grundsätzlichen Grenzen** nicht unterschreiten lassen, die günstigstenfalls bei $\Delta x \geq \lambda/2$ liegen.

I. Auflösung in der lichtoptischen und elektronenmikroskopischen Abbildung

Sehschärfe und visuelle Erkennung

a) Demonstrieren wir zunächst die einfache **Augen-Sehschärfe**. - Wir betrachten ein Testobjekt mit **Dreistriche-Gruppen** unterschiedlicher Abstände (Abb. 1). Aus einer gegebenen Entfernung (z.B. 1 m) kann man von einer gewissen Grenze an die Striche nicht mehr als "aufgelöst" erkennen. Unter optimalen Bedingungen liegt die "Normal-sehschärfe" des menschlichen Auges bei etwa 60 Bogen-Sekunden. (Hinweise zur Versuchsdurchführung vgl. /1b/). - Wir können für den Sehschärfetest auch eine kommerzielle **Standard-Auflösungs-Testplatte** verwenden. Diese enthält vertikale und horizontale Dreistriche-Gruppen, deren Abstände feiner abgestuft sind; (kopierfähige Abbildung s. /1/). - Die meisten Beobachter werden die **visuelle Grenzauflösung** nicht erreichen. Das liegt einerseits daran, daß die Beobachtungs-Bedingungen bezüglich Helligkeit und Kontrast nicht optimal sind. Andererseits haben viele Zuschauer Sehfehler und keine optimal angepaßte Fernbrille.

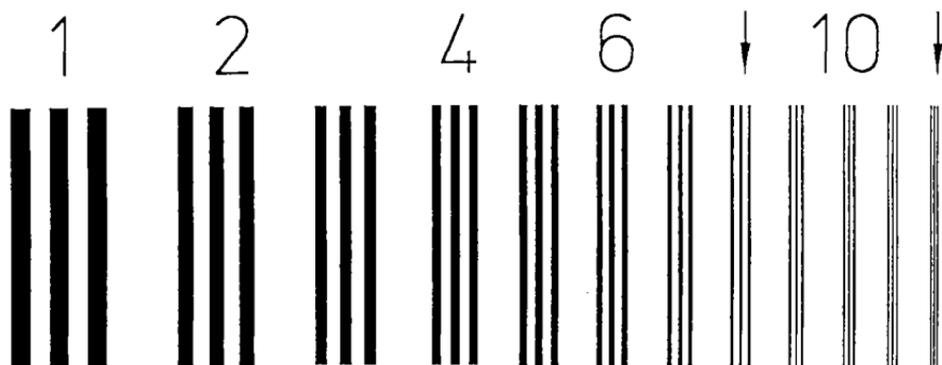


Abb. 1 Dreistriche-Testtafel zur Bestimmung des Auflösungsvermögens

b) Mit den nächsten Versuchen wollen wir den Unterschied zwischen **Auflösung** und **Erkennbarkeit** verdeutlichen. Eine **Glasfaser** von einigen Zehntel mm \emptyset oder ein Roßhaar von einem Besen mit 0,1 - 0,2 mm \emptyset ist bei intensiver Beleuchtung gegen einen dunklen Hintergrund selbst auf größere Entfernungen gut sichtbar, insbesondere wenn die Lichtstreuung schräg nach vorne erfolgt. Wir benutzen hier zur Beleuchtung Laserlicht (wegen der sehr hohen Leuchtdichte), das wir mit einer kurzbrennweitigen Zylinderlinse (bestehend aus einem einfachen Glasrührstab mit 5 mm \emptyset) vertikal aufgeweitet haben. Obwohl der Faser-Durchmesser 1 - 2 Größenordnungen unter der Augenauflösungs-Grenze liegt, kann man den leuchtenden Faden auch aus 10 bis 20 m Entfernung sehr gut erkennen. Die **Sichtbarkeit** ist nämlich nur eine Frage der Helligkeit im Objekt und Hintergrund. - Ähnliche Erscheinungen kennt bereits jeder: z.B.

wenn er die schwebenden Staubteilchen im Sonnenstrahl eines Zimmers oder ein leuchtendes Spinnen-Netz mit nur etwa 10 μm Fäden im Gegenlicht eines Hausbodens sieht.

c) Wenn wir nun 2 **Glasfäden** oder 2 Roßhaare, die im Abstand einiger Durchmesser nebeneinander montiert sind, beleuchten, so können wir das Streulicht ebenfalls gut sehen, aber natürlich die zwei Fäden **nicht** getrennt erkennen und **auflösen**. Wir haben also zwischen "**Sichtbarkeit**" bzw. "**Nachweisbarkeit**" eines Objektes und der "**Auflösung**" von Strukturen sehr wohl zu unterscheiden.

Die beugungsbegrenzte Auflösung des Auges

a) Wodurch ist die **Auflösung** bei **optischen Abbildungen** begrenzt? - Das Auflösungsvermögen der meisten optischen Geräte ist durch **restliche** (nicht voll auskorrigierte) **Abbildungs-** oder **Linienfehler** oder auch durch **Fokussierungsfehler** bestimmt. - Bei genügend starker **Abblendung** der Linsen eines jeden abbildenden Systems wird jedoch das Auflösungsvermögen schließlich immer durch **Beugung** begrenzt /1a/. Das gilt auch für das menschliche Auge.

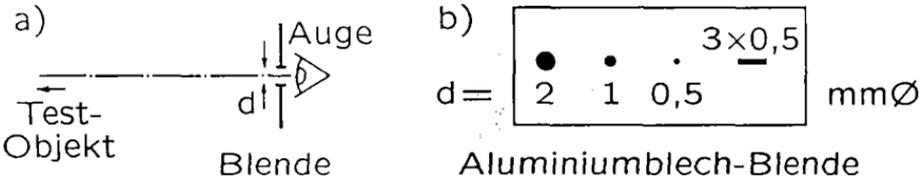


Abb. 2 a) Abblenden der Augenpupille bis zur beugungsbegrenzten Auflösung; b) Loch- und Schlitzblenden (in Al-Folie oder Karton, ca. 30 x 50 mm)

b) Bei normalem Tagessehen beträgt die Pupillengröße etwa 4 - 5 mm \varnothing . Für eine mittlere Wellenlänge des weißen Lichtes $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$ errechnet sich aus den Beugungsformeln (s.u.) ein **Grenzwinkel der Auflösung** von etwa 30". D.h. vom menschlichen Auge mit der Normaleschärfe 60" wird bis auf einen Faktor 2 die beugungsbedingte Auflösungsgrenze bereits erreicht.

c) Durch Vorschalten einer kleinen **Lochblende** dicht vor die Augenpupille kann die wirksame Blende deutlich verringert und damit die Auflösung des Auges tatsächlich durch **Beugung** begrenzt werden (Abb. 2a). Betrachten wir nun noch einmal das Dreistriche-Testobjekt und merken uns die Nummer der letzten gerade noch aufgelösten Striche. Dann setzen wir die Löcher einer **Aluminium-Blechblende** (Abb. 2b) nacheinander dicht vor die Augenpupille. Für das größte Loch von 2 mm \varnothing ist noch keine Verringerung der Auflösung zu beobachten. Diese wird jedoch deutlich für das mittlere Loch mit 1 mm \varnothing und sehr deutlich für das kleinste Loch mit 0,5 mm \varnothing . Allerdings

wird das Bild dabei auch wesentlich dunkler. - Halten wir schließlich die **Schlitzblende** (0,5 x 3 mm) dicht vor die Augenpupille, so hängt die Auflösung wesentlich von der Schlitzrichtung und der Richtung der Striche im Testobjekt ab. Drehen wir die Schlitzblende vor dem Auge, so dreht sich auch die Richtung der Unschärfe.

Geeignete Lochblendensätze (z.B. für Schülerversuche) lassen sich auch durch Durchstechen eines Kartonstreifens (Postkarte) erzeugen, wobei man einen Stahl Nagel (ca. 2 mm Ø), eine sehr dicke Stopfnadel (ca. 0,8 - 1 mm Ø), eine möglichst feine Nähnadel (ca. 0,5 mm) und einen kleinen Uhrmacher-Schraubenzieher benutzt.

Beugungsbegrenzung bei reeller Abbildung

a) Eine gleichartige Verringerung der Auflösung durch Beugungseffekte erfolgt natürlich auch bei **reeller Abbildung**, wenn die abbildende Linse auf genügend kleine Durchmesser D abgeblendet wird (Abb. 3). - Wir beleuchten ein photographisch stark verkleinertes Gitter (Photoobjekt G_1 in Abb. 4, $g = 0,06$ mm) mit Laserlicht und bilden es mit einer Linse ($f = 100$ mm) auf den weit entfernten Wandschirm ab: Wir sehen dann das aufgelöste Bild des Strichgitters. Wenn wir nun hinter die Linse eine Lochblende mit 2 mm Ø einsetzen (Al-Folienblende), so wird im allgemeinen das Bild etwas unschärfer; es ist aber noch gut aufgelöst. Mit einer Lochblende 1 mm Ø erhält man dagegen i. allg. keine Auflösung mehr.

b) Die **Beugungstheorie** zeigt, daß der gerade noch auflösbare Objektabstand Δx gegeben ist durch

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \varphi_A} = \frac{\lambda}{A} \quad (1)$$

Dabei ist φ_A der halbe Öffnungswinkel der abbildenden Linse (vom Objekt P aus betrachtet, siehe Abb. 3a); $A = \sin \varphi_A$ wird numerische Apertur genannt. - Aus der Geometrie folgt

$$\tan \varphi_A = D/2f. \quad (2)$$

c) Auch für das **Lichtmikroskop** mit wesentlich höheren numerischen Aperturen gilt die Gl. (1). Mit sehr hochauflösenden Objektiven erzielt man fast $A \approx 1$ und damit Grenzauflösungen $\Delta x \approx \lambda$. Bei schiefer oder bei inkohärenter Beleuchtung ist $\Delta x \approx \lambda/2$. Somit wird die Grenze in der Lichtmikroskopie bei etwa $0,3 \mu\text{m}$ erreicht.

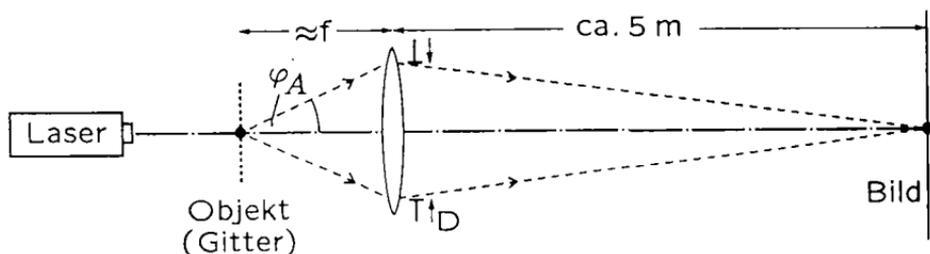


Abb. 3 Zur Demonstration der Auflösung bei reeller Abbildung eines Gitters G mit Laserlicht-Beleuchtung

Transmissions-Elektronenmikroskopie

a) Einen entscheidenden Fortschritt in der Auflösung gegenüber dem Lichtmikroskop um 3 Größenordnungen brachte das **Elektronenmikroskop**. - Bei einer normalen licht-optischen Abbildung werden bekanntlich alle vom Objektpunkt P ausgehenden Strahlen im Bildpunkt P' gesammelt. Im Elektronenmikroskop werden statt Glaslinsen kurzbrennweitige Elektronenlinsen verwendet. Mit solchen Linsen hat Ernst Ruska 1932 (Nobelpreis 1986) an der damaligen Techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg ein Elektronen-Mikroskop realisiert /2/, mit dem erstmalig 1936 eine höhere Auflösung als mit dem Lichtmikroskop erreicht werden konnte.

f) Während das Lichtmikroskop eine **Auflösung** von etwa $\lambda/2 = 0,3 \mu\text{m}$ erzielt, erreicht man mit den besten Elektronen-Mikroskopen eine Auflösung von unter 0,2 nm, was schon atomaren Dimensionen entspricht. Unter günstigen Bedingungen gelang es in letzter Zeit tatsächlich, Atome in einem Kristallgitter elektronen-mikroskopisch abzubilden /3/.

g) Bekanntlich besitzen die **Elektronen** als Materie-Teilchen auch **Wellencharakter**. Die Materiewellenlänge ist $\lambda_M = h/p$, wobei h die Plancksche Konstante und $p = m \cdot v$ der Teilchenimpuls ist. Dieser kann auch durch die Teilchen-Energie $E = (1/2)mv^2$ ausgedrückt werden, so daß gilt

$$\lambda_M = h/\sqrt{2m_e E} \quad (3)$$

mit m_e = Elektronenmasse. - Für Elektronen im Elektronenmikroskop mit $E = e \cdot U = 100 \text{ keV}$ errechnet sich eine Materiewellenlänge von etwa $\lambda_M = 0,004 \text{ nm}$.

h) Auch im Elektronen-Mikroskop wäre eine durch **Beugungseffekte** bedingte prinzipielle Auflösungsgrenze $\Delta x \approx \lambda_M$ ununterschreitbar. Praktisch wird aber diese Grenze noch bei weitem nicht erreicht; es fehlen etwa 2 Zehnerpotenzen. Die Auflösung wird nämlich im wesentlichen begrenzt durch unvermeidbare Abbildungsfehler der kurzbrennweitigen Elektronenlinsen. Diese lassen sich nur reduzieren, indem man verhältnismäßig kleine Öffnungsverhältnisse oder Aperturen etwa $A < 0,01$ verwendet, was zur Auflösungsgrenze bei einigen Zehntel nm führt.

II. Struktur - Bestimmungen aus optischen Beugungs- und Streuexperimenten

Einführung

a) Um quantitative Informationen über sehr feine Objektstrukturen zu erhalten, muß man das Objekt nicht notwendigerweise abbilden. Bei "Beleuchtung" mit einer Wellenstrahlung kann man nämlich auch aus **Streu-** bzw. aus **Beugungs-Interferenz-Intensitätsverteilungen** indirekt auf die streuende Objektstruktur selbst zurückschließen, - allerdings auch hier nur innerhalb bestimmter Auflösungsgrenzen.

b) Wir wollen die **Zusammenhänge** zwischen **Beugungsmuster** und beugenden **Objekten** zunächst mit einer Reihe von Laserlicht-Versuchen veranschaulichen und verdeutli-

chen. Hierfür werden Beugungsblenden verschiedener Form (Lochblenden, Spalte, Doppelspalte, Gitter usw.) mit geeigneten Abmessungen (etwa 0,05 bis 0,2 mm) benötigt. Für Demonstrationsversuche sind photographisch hergestellte Beugungsblenden-Sätze sehr zweckmäßig /4,5/.

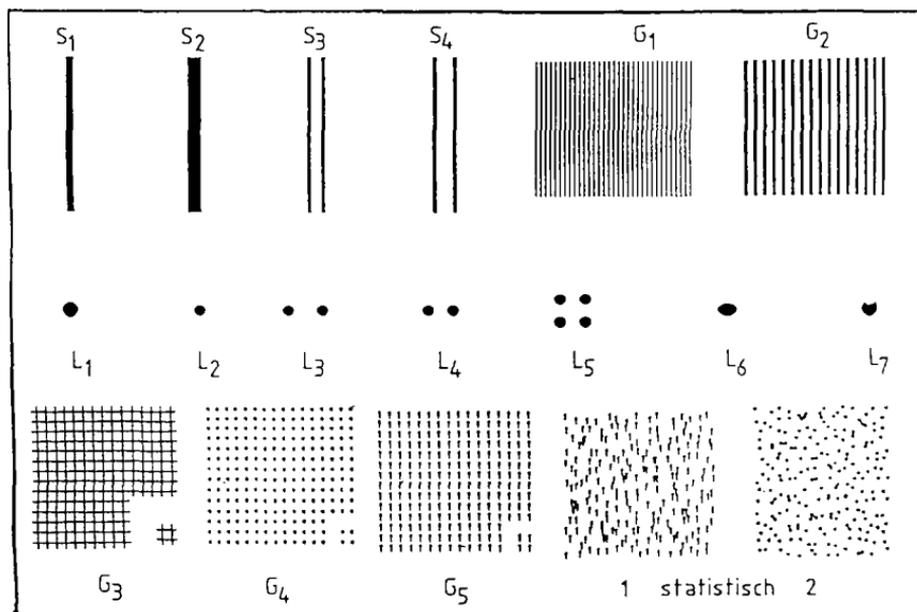


Abb. 4 stark vergrößerte, schematische Darstellung des Satzes von Beugungsblenden-Strukturen im Photo-BeugungsobjektDia.

c) Für die folgenden Versuche verwenden wir ein **Beugungsobjekt-Dia** mit den in Abb. 4 schematisch dargestellten 18 Beugungsblenden-Strukturen. Mit dem Parallel-Lichtbündel eines kleinen HeNe-Lasers (mit ca. 1 - 2 mm Ø) wird ein bestimmtes Beugungsobjekt durchstrahlt und das Beugungsmuster auf einem mehrere Meter entfernten Schirm erzeugt. Im abgedunkelten Raum lassen sich die Beugungserscheinungen auch vor einem größeren Auditorium zeigen.

d) Andererseits lassen sich die **Fraunhofer-Beugungserscheinungen** auch direkt auf der **Augennetzhaut** erzeugen, indem man die einzelnen Beugungsobjekte nacheinander dicht vor die Augenpupille bringt und in eine punktförmige einfarbige Lichtquelle blickt. Eine 6V, 30W-Punktlichtlampe mit Plexiglas-Rotfilter in einigen Metern Entfernung reicht in einem mäßig abgedunkelten Raum für ein großes Auditorium; für einen kleineren Kreis genügt notfalls eine Taschenlampe, abgedeckt mit roter Farbfolie.

Beugung an einfachen Blenden

a) Die Beugung eines Laserbündels an einer **Spaltblende** S_1 liefert bekanntlich auf einem weit entfernten Schirm ein breites helles Hauptmaximum und eine Reihe anschließender, halb so breiter Nebenmaxima abnehmender Intensität. Der **breitere Spalt** S_2 ergibt im Prinzip die gleiche Intensitäts-Verteilung, jedoch maßstäblich verkleinert. Eine **Doppelspaltblende** S_3 mit sehr schmalen Einzelspalten liefert dagegen Beugungsmaxima mit gleichen Abständen und nach außen nur langsam abnehmender Intensität. Auch hier erzeugt der Doppelspalt mit dem **größeren Spaltabstand** S_4 ein feineres Beugungsmuster. Aus den Beugungsmustern können wir nun umgekehrt auf die Art und Größe der beugenden Spaltstrukturen zurückschließen und z.B. den Doppelspalt als "aufgelöst" erkennen.

b) Die Beugung an einer kreisförmigen **Lochblende** L_1 liefert ein zentrales Maximum, umgeben von einem Ringsystem mit charakteristischer Größe und Intensitätsverteilung; die **kleinere Lochblende** L_2 erzeugt ein **größeres** Beugungs-Ringsystem. Eine **Doppel-Lochblende** L_3 liefert das gleiche Ringsystem, aber durchzogen mit den Doppelspalt-Interferenzstreifen. Für einen **größeren Lochabstand** der Blende L_4 liegen die Interferenzstreifen enger. (Aus dem Streifenabstand läßt sich der Mittenabstand der Löcher bestimmen.) Die **Vierfach-Lochblende** L_4 liefert wieder das gleiche Ringsystem des Einzelloches, aber durchzogen mit vertikalen und mit horizontalen Interferenzstreifen (quadratisches Lichtpunkteraster).

c) Selbst Feinheiten einer Objektstruktur lassen sich aus den Beugungsmustern ermitteln. - Eine **elliptische Lochblende** L_5 liefert elliptische Beugungsringe. Eine **Randstörung** an einer **Kreislochblende** L_6 (wie sie z.B. als Grat bei Nadelstich-Lochblenden oft auftritt) ergibt Unterbrechungen und Versetzungen in den Interferenz-Ringen.

d) Um diese **Unterschiede** zu erkennen, muß man allerdings hierbei das Beugungsmuster schon bis zu den weiter außen liegenden Bereichen und Ringen betrachten. Überhaupt ist es für eine **"Auflösung"** von Objektstruktur-Einzelheiten aus den beobachteten Beugungsmustern erforderlich, daß man nicht nur das Zentrum, sondern zumindest noch das erste benachbarte Beugungsmaximum bei der Beobachtung oder Messung erfaßt.

Beugung an Strichgittern

a) Ähnliche Verhältnisse finden wir bei der Beugung an Strichgittern (Abb. 4, oben); diese liefern eine Reihe scharfer Interferenz-Lichtpunkte im Beugungsmuster. Für das **feinere Gitter** G_1 liegen die Beugungs-Lichtpunkte weiter auseinander als für das Gitter G_2 . Aus dem (Winkel-)Abstand der Beugungsmaxima läßt sich bekanntlich der Abstand der Gitterstriche g genau bestimmen. - Für den **Gitter-Beugungswinkel** φ_1 zwischen 0-tem und 1-tem Maximum gilt

$$\sin \varphi = \lambda / g. \quad (4)$$

Für sehr, sehr feine Gitter wird der Beugungswinkel immer größer und erreicht schließlich $\varphi_1 = 90^\circ$. Damit wird aber die oberste **Grenze der Auflösung** bei $g = \lambda$ erreicht.

b) Für noch feinere Gitter mit $g < \lambda$ treten überhaupt **keine Beugungsbündel** ± 1 . Ordnung mehr auf. Aus dem nicht abgelenkten Beugungsbündel 0.-Ordnung können wir aber keine Rückschlüsse auf die Gitter-Eigenschaften ziehen. - Gleiches gilt aber auch, wenn wir bei einem gröberen Gitter mit einer Sonde einen **zu kleinen Winkelbereich** $\Delta\varphi$ des Gitterbeugungsfeldes ausmessen, so daß wir schon die ersten Maxima $+1$ und -1 nicht mehr erfassen. - Und das gleiche gilt ferner, wenn wir das Gitter mit einer **Linse abbilden** und wegen der beschränkten Öffnung oder Apertur die Beugungsmaxima 1. Ordnung nicht mehr in die Linse eintreten können, (d.h. bei einem Aperturwinkel $\varphi_A < \varphi_1$). - Wir erhalten dann **keine Auflösung** im Bild. - Das ist die wichtigste Aussage der Theorie des Mikroskops von E. Abbe.

c) Offensichtlich haben wir in diesen Fällen eine allgemeine **beugungsbedingte Auflösungsgrenze** unterschritten

$$\Delta x \geq \lambda / \sin \varphi_A \quad (5)$$

wobei φ_A der bei der Streulicht-Messung oder bei der Beobachtung erfaßte Beugungswinkel ist. - Diese Grenze gilt nicht nur für Gitter, sondern allgemein, d.h. auch für Doppelobjekte und Strukturdetails von Einzelobjekten usw.

Beugung an zweidimensionalen Gitter-Strukturen

a) Die Experimente und Überlegungen lassen sich leicht auch auf die Beugung an **2-dimensionale Gitterstrukturen** ausdehnen. (Abb. 4, unten). Die Beugungsmuster lassen sich weiterhin bei Durchstrahlung mit dem Laser-Lichtbündel in Projektion auf einem mehrere Meter entfernten Schirm erzeugen oder aber subjektiv-visuell beobachten. Derartige Beugungsversuche an zweidimensionalen Gitterstrukturen können als Analogie- oder Modellversuche zu Röntgenstrahl-Interferenzen an dreidimensionalen Kristallgitterstrukturen eingesetzt werden /6,7/.

b) Für das **Netzgitter** G_3 erhalten wir ein 2-dimensionales Raster scharfer Beugungs-Lichtpunkte. Eine Auflösung in zwei Dimensionen erfordert hier wieder die Vermessung (oder die Erfassung zur Abbildung) von mindestens 4 Maxima.

c) Wir können aber auch Gitter einsetzen, die die **gleiche** Gitterkonstante besitzen, aber aus verschiedenen Struktur-Elementen aufgebaut sind. Wir verwenden z.B. ein **Gitter** G_4 aus **kreisförmigen Löchern** (Abb. 4, unten) und erhalten zwar das gleiche Beugungs-Lichtpunkteraster wie für das Netzgitter, jedoch mit einer ganz anderen Intensitätsverteilung in den einzelnen Punkten. Wir erkennen übrigens beim Löchergitter in der überlagerten Verteilung das runde Hauptmaximum der Einzel-Lochblende. - Ein **Gitter** G_5 aus **Kommas** liefert eine noch andere Hüllverteilung über die Intensitäten der Beugungsraster-Lichtpunkte.

d) Die Hüllverteilung entspricht jeweils der Beugungsverteilung des **Gitter-Grundelements**. Wir zeigen das Beugungsmuster einer einzelnen **Kreislochblende** und dann das Beugungsmuster des **Löchergitters** und nun für ein einzelnes **Komma** und dann für ein **Kommagitter**. Besonders eindrucksvoll ist die Änderung der Hüllverteilung beim kontinuierlichen **Übergang** vom Löchergitter zum Kommagitter und umgekehrt. Auch beim kontinuierlichen Übergang vom Komma- zum Netzgitter bleibt die Verteilung des Interferenz-Lichtpunkte-Rasters erhalten, und es ändert sich nur die Einhüllende der Intensitäten.

Überauflösung und "Apriori-Information"

a) Kann man aber nun nicht doch noch die genannte Auflösungsgrenze unterschreiten? Unter bestimmten Bedingungen läßt sich tatsächlich eine gewisse **"Überauflösung"** erreichen, wenn man sehr genau mißt und wenn man geeignete **"Apriori-Informationen"** über das beugende Objekt zur quantitativen Auswertung einsetzen kann.

b) Bei der **beugungsbegrenzten Abbildung** eines **Punktes P** erhält man in der Bildebene eine entsprechende Beugungs-Intensitätsverteilung $I(x)$. Bei der Abbildung von **zwei** dicht benachbarten **Objektpunkten** P_1, P_2 beobachten wir dann die Überlagerung der beiden seitlich versetzten Beugungsverteilungen der Einzelpunkte P'_1 und P'_2 (Abb. 5a). - Um die Punktbilder als "aufgelöst" erkennen zu können, muß die Gesamtintensitätsverteilung $I_{1,2}$ eine gewisse Einsattlung aufweisen.

c) Nach dem **Rayleighschen Auflösungskriterium** beobachten wir zwei Punktbilder dann als gerade noch aufgelöst, wenn das Hauptmaximum des einen auf das 1. Beugungsminimum des anderen fällt. - Praktisch ergibt sich dann eine Intensitäts-Einsattlung (bei inkohärent strahlenden Objektpunkten) von etwa 20 % (Abb. 5b₁), und das reicht erfahrungsgemäß unter günstigen Bedingungen bei visueller Beobachtung zur Auflösung gerade noch aus. Die genannte Bedingung führt dann auf die Auflösungsgrenze für den Punktabstand im Objekt $\Delta x = \lambda/2A$. $A = \sin \varphi_A$ ist wieder die numerische Apertur der Abbildungslinse. Im Falle senkrechter kohärenter Beleuchtung der Punkte P_1, P_2 ergibt sich eine um etwa den Faktor 2 geringere Auflösung: $\Delta x \approx \lambda/A$.

d) Bei **kleineren Objektpunkt-Abständen** Δx wird die Einsattlung in der beobachtbaren Gesamtintensitätsverteilung kleiner als 20 % (Abb. 5b₂). Bei einem bestimmten Abstand $\Delta x = 0,42 \cdot \lambda/A$ geht das Zwischenminimum in ein verbreitertes Maximum mit horizontaler Wendetangente über (Abb. 5b₃). Auch diesen Grenzfall könnte man als Auflösungskriterium verwenden (Sparrow-Kriterium).

e) Selbst bei **noch kleineren Abständen** $\Delta x = 0,3 \cdot \lambda/A$ der Objektpunkte P_1, P_2 wird die Gesamtintensitätsverteilung von der eines einzelnen Punktes etwas abweichen (Abb. 5b₄). - Wenn man nun jedoch die Gesamtverteilung genau mißt und aus der Theorie oder Modellvorstellungen **apriori** weiß, daß ein **Doppelpunkt-Objekt** vorliegen muß, dann läßt sich aus der gemessenen Verbreiterung der Kurve der "unaufgelösten"

Intensitätsverteilung der Abstand Δx der beiden Objektpunkte näherungsweise ermitteln.

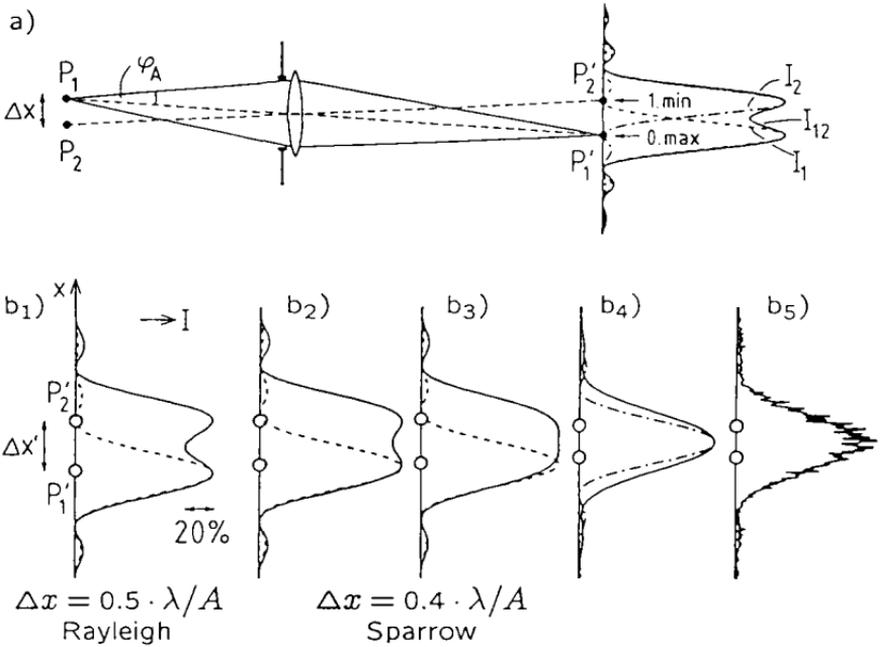


Abb.5 Auflösung und Überauflösung mit "Apriori-Information" bei Abbildung zweier inkohärent beleuchteter Objektpunkte P_1, P_2 ; a) Strahlengang und Überlagerung der Beugungsintensitäts-Verteilungen im Bild; b) Gesamtintensitätsverteilungen $I_{12}(x)$ für verschiedene Objektpunkt-Abstände Δx .

f) Praktisch wird aber jede Messung von einem gewissen **Rauschen** überlagert (Abb. 5b₅). Damit läßt sich dann die Abweichung von der reinen Einzelpunkt-Beugungsverteilung nur noch unsicher feststellen und der Rückschluß auf das Doppelpunkt-Objekt unterhalb der Auflösungsgrenze $\Delta x < \lambda/2A$ wird auch mit Apriori-Information sehr bald unmöglich.

g) Bei direkter quantitativer Auswertung gemessener **Streu- und Beugungs-Verteilungen** läßt sich in gleicher Weise eine "Überauflösung" erzielen, wenn **Apriori-Informationen** über die Objekte vorhanden sind. Aber auch diese ist durch das Rauschen sehr beschränkt. - Im allgemeinen wird auch hier eine Auflösung wesentlich unter $\Delta x \approx \lambda/2$ nicht möglich sein.

III. Auflösungsgrenzen für atomare und subatomare Strukturen

Nachdem wir den Auflösungsbegriff und die Auflösungsgrenzen in der Optik intensiv diskutiert und mit Experimenten veranschaulicht haben, wollen wir diese Erkenntnisse nun auch auf ganz andere Bereiche der Physik anwenden, insbesondere auf die Betrachtung der **Auflösungsgrenzen** für atomare und subatomare Strukturen.

Beugung von Röntgenstrahlung an Kristallen

a) Die **Röntgenstrahl-Interferenzen** an Kristallen /8,13/ haben wir bereits kurz erwähnt. Mit Wellenlängen $\lambda = 0,1$ bis $0,3$ nm gelingt es, die Atomabstände in den Raumgittern im Bereich von $g = 0,05 - 0,5$ nm aufzulösen, wobei die Auflösungsgrenze $g = \Delta x \geq \lambda/2$ wieder nicht unterschritten werden kann.

b) Die Zusammenhänge wollen wir kurz für Beugung an **linearen Gitterstrukturen** erläutern (Abb. 6). Für **senkrechten Lichteinfall** $\varphi_e = 0$ ergibt sich bei einem Beugungswinkel φ aus der Geometrie (gestricheltes Dreieck) der Gangunterschied $\Delta = g \cdot \sin \varphi$ zwischen benachbarten abgebeugten Strahlen. Für $\Delta = \lambda$ erscheint das erste Beugungs-Maximum; es gilt also

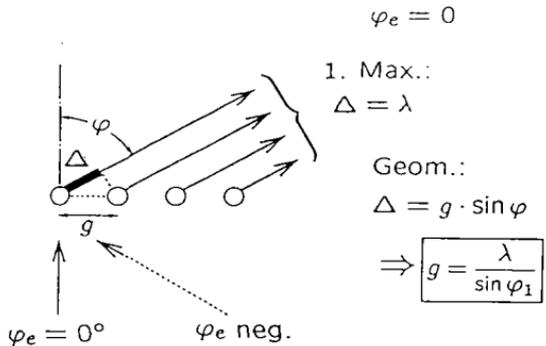


Abb. 6 Zur Beugung am Gitter bei senkrechtem und schiefe Lichteinfall

$$g = \lambda / \sin \varphi_1 \quad (6)$$

Mindestens das erste Beugungsmaximum wird aber benötigt, um die Gitterkonstante g zu bestimmen bzw. aufzulösen. Für den maximal möglichen Beugungswinkel $\varphi_1 = 90^\circ$ wird $g_{\min} = \lambda$.

c) Bei **schiefe Lichteinfall** unter dem Winkel φ_e hat man zusätzlich einen entsprechenden Gangunterschied $\Delta_e = g \cdot \sin \varphi_e$ auf der Einfallseite zu berücksichtigen, so daß für den Gesamtgangunterschied $(\Delta - \Delta_e)$ anzusetzen ist und daher das 1. Maximum für $g \cdot (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_e) = \lambda$ erscheint. Für negative φ_e (d.h. Beugung in Rückstreurichtung) kann im Extremfall $\varphi_e = -90^\circ$ und $\varphi_1 = +90^\circ$ betragen; die kleinste meßbare Gitterkonstante ist daher $g_{\min} = \lambda/2$. Das gilt nun auch für die Röntgenstrahlungs-Rückstreureflexe von Kristallgittern. Die kleinste auflösbare Struktur ist also $\Delta x = \lambda/2$.

Elektronen-Materiewellen-Interferenzen

a) Auch mit **Elektronen-Materiewellen** /10,12/ sind in ähnlicher Weise Kristallgitter-

Interferenzen möglich /8,9,13/, und es ergeben sich entsprechende Ergebnisse wie bei Röntgenstrahl-Interferenzen. Die Elektronen-Materiewellenlänge war nach Gl.(3)

$$\lambda_M = h/\sqrt{2m_e E}. \quad (7)$$

Setzt man die Werte für die Plancksche Konstante h und die Elektronenmasse m_e ein, so erhält man die Zahlenwerte für λ_M (in nm) aus der Elektronen-Energie E (in eV) aus der Beziehung

$$\lambda_M \text{ (nm)} = 1,23/\sqrt{E(\text{eV})} \quad (8)$$

- Die Auflösungsgrenze liegt im Prinzip wieder bei $g > \lambda_M/2$.

b) Für **schnelle Elektronen** ist λ_M sehr klein; z.B. beträgt in einem Elektronenmikroskop mit 100 kV Beschleunigungsspannung $\lambda_M = 0,004$ nm. Die Kristall-Gitterkonstanten $g \approx 0,1$ nm sind also immer sehr groß gegen λ_M ; d.h. es werden kleine Beugungswinkel entstehen, die gut aufgelöst werden.

c) Bei Verwendung **langsamer Elektronen** für die Streuung an Kristall-Oberflächen, den sogen. LEED-Verfahren /13/ (Low Energy Electron Diffraction), erreicht dagegen λ_M die Größenordnung der Atom-Abstände g . Es wird also die Auflösungsgrenze etwa erreicht (z.B. für 100 eV mit $\lambda_M = 0,1$ nm; große Beugungswinkel bis zur Rückstreuung).

d) Bei der Streuung **extrem langsamer Elektronen**, im sogen. Ramsauer-Effekt /8/, mit etwa 1 eV wird die Elektronen-Materiewellenlänge $\lambda_M = 1$ nm deutlich größer als die Durchmesser D der Edelgas-Atome (etwa $D = 0,3$ nm). Die Elektronen-Wellen laufen daher um die Gasatome im wesentlichen ungestört herum, ähnlich wie Wasserwellen um nicht zu dicke Holzpfähle. Eine "Auflösung" ist natürlich nicht mehr möglich.

e) Entsprechende Untersuchungen an Kristallen und an anderen atomaren Strukturen werden übrigens heute auch häufig mit **Neutronen-Materiewellen** /14/ ausgeführt; bei mittelschnellen bis zu thermischen Neutronen-Geschwindigkeiten (25 meV; $\lambda_M = 0,18$ nm) ist Beugung an Kristallgittern gut möglich.

Auflösung des Atomaufbaus

a) Werden Atome mit **niederenergetischen Elektronen** von einigen eV beschossen, so lassen sich über die äußerste **Elektronenhülle** gewisse quantitative Informationen erhalten. - Man kann die Atome z.B. ionisieren (d.h. das Leuchtelektron entfernen) oder wie im Franck-Hertz-Versuch stufenweise anregen. In der modernen Elektronen-Energieverlust-Spektroskopie /13/ werden entsprechende Verfahren zu Präzisionsmethoden ausgebaut.

b) Die stoßenden **niederenergetischen** Elektronen haben vergleichbare Energien wie die Valenz-Elektronen in der äußeren Atom-Hülle. Für 10 eV errechnet sich etwa $\lambda_M = 0,5$ nm. Dem entspricht aber der Atom-Durchmesser oder besser der Umfang der Bohrschen Bahnen: $\lambda_M \approx \pi \cdot D$. - Die Wellenlänge reicht also auch nach den Regeln

der "Optik" gerade aus, die Struktur der **äußeren Atom-Elektronen-Schalen** "aufzulösen".

c) Die **innersten Schalen** schwerer Atome besitzen dagegen um zwei Größenordnungen kleinere Durchmesser als die Außenschalen, was man leicht anhand des Bohrschen Atommodells abschätzen kann; (z.B. K-Schale im Blei-Atom: $2r = 0,001 \text{ nm}$). Die Bindungs-Energien wachsen sogar quadratisch, d.h. mit $1/r^2$, um 4 - 5 Zehnerpotenzen. Man benötigt also Elektronenstrahl-Energien im Bereich von 100 keV für die Anregung und "Auflösung" der innersten Schalen-Strukturen. Andererseits liegt die Materiewellenlänge dieser Elektronen bei $\lambda_M = 0,004 \text{ nm}$, und es ergibt sich wieder Übereinstimmung mit der Regel für die "Auflösungsgrenze" $\Delta x \approx \lambda$.

Ähnliche Wellenlängen ergeben sich für die K-Schalen-Elektronen aus der mittleren Größe (\bar{D}) der Orbitale als räumliche Eigenschwingungen der Elektronendichte-Verteilungen ($\bar{D} \approx \lambda_M$)

Auflösung der Atomkern-Größe

a) Die Atomkerne sind um einen Faktor 10^4 kleiner als die Atome mit ihrer Hülle. - Die ersten quantitativen Aufschlüsse ergaben sich aufgrund der berühmten **Streuformel** von **Rutherford** für die Rückstreuung von α -Teilchen an schweren Atomkernen /15, 16/. Die vorausgesagte Winkelabhängigkeit der Streuung von α -Strahlung an Goldfolie wurde von Geiger und Marsden quantitativ bestätigt. Die Stoßgesetze führten zu der Abschätzung: Die Kernradien r_K müssen kleiner als 10^{-14} m sein.

b) Tatsächlich reicht die Materiewellenlänge

$$\lambda_M = h/\sqrt{2mE} \quad (9)$$

der α -Teilchen für die Auflösung etwa gerade aus. Für die vom Radium ausgesandte α -Strahlung mit 4,9 MeV errechnet sich $\lambda_\alpha = 7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$; es ist also $r_K \approx \lambda_\alpha$.

c) Für entsprechende **Protonen-** und auch **Neutronen-Streuversuche** wäre wegen des Massenverhältnisses $m_\alpha/m_p = 4$ die 4-fache Teilchen-Energie für die Erzeugung der gleichen Wellenlänge und damit zur Auflösung nötig.

d) Für **Elektronen-Streuversuche** brauchte man wegen der sehr viel geringeren Masse m_e dagegen nach Gl. (5) die 7000-fache Energie, d.h. etwa 35 GeV. Allerdings müßte man hier anstelle der Formeln der klassischen Physik (Gl. 9) bereits **relativistische Formeln** /13,18/ verwenden: Für Elektronen-Geschwindigkeiten $v \rightarrow c$ gilt näherungsweise

$$\lambda_M = hc/E \quad (10)$$

Im hochrelativistischen Bereich verkleinert sich also die Materiewellenlänge umgekehrt proportional zur Energie. Die Ruhemasse der Teilchen m_0 geht nicht mehr ein, da die Ruheenergie $E_0 = m_0 c^2$ in der Gesamtenergie E hier vernachlässigbar ist.

e) Zur Auflösung der Kerngröße ($2r_K = 10^{-14} \text{ m}$) durch **Elektronenstreuung** sind nach Gl. (6) Energien von mindestens 120 MeV erforderlich. Für die Auflösung von Atomkern-Unterstrukturen im Femtometer-Bereich (10^{-15} Meter) sind dagegen Elektronen-Energien im GeV-Bereich nötig.

Auflösung von Substrukturen in Nukleonen

a) Der zumindest vorläufig letzte Schritt ist die Auflösung **subnuklearer Strukturen**. Die erste Andeutung einer räumlichen Unterstruktur im Proton fanden bereits Hofstadter und Mitarbeiter etwa 1960 in ihren Elektronen-Streuversuchen /17/ bei maximal 0,5 GeV. Die Elektronen-Materiewellenlänge $\lambda_M = 2,4$ fm war hier allerdings noch deutlich größer als der Protonen-Durchmesser $2r_p = 1,7$ fm, und für eine wirkliche Struktur-Auflösung reichte es also noch nicht aus. Die Situation entsprach etwa der in Abb. 5b₄.

b) Nach der Theorie von Gell-Mann sollten alle Hadronen aus noch kleineren Teilchen, den **Quarks**, aufgebaut sein, mit einer elektrischen Ladung $-1/3$ und $+2/3$, einem Spin $1/2$ und anderen Eigenschaften /15/. So sollen Proton und Neutron jeweils aus 3 Quarks und die Mesonen aus 2 Quarks bestehen usw.

c) Eine experimentelle Auflösung von subnuklearen Strukturen konnte man erst für Elektronen-Streuversuche im GeV-Bereich erwarten. Dieser Bereich wurde ab ca. 1970 nach Fertigstellung des Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) erstmals zugänglich /16,19,20/, wobei zunächst bis zu 8 GeV und später bis zu 20 GeV-Elektronen zur Verfügung standen. Tatsächlich gelang es Friedman, Kendall und Taylor (Nobelpreis 1990) sowie anderen Arbeitsgruppen durch **Elektronen-Streuxperimente** an Protonen und Neutronen die Existenz der internen **Quark-Struktur** der Nukleonen experimentell nachzuweisen. Im Prinzip fanden sie unter geeigneten Bedingungen eine unvermutet starke Streuung in große Winkel, die (ähnlich wie die Rutherford-Streuung) auf noch kleinere oder punktförmige Teilchen innerhalb der Nukleonen hinweist.

Streuung von Elektronen höchster Energie an Protonen und Neutronen

Bei den **Elektronen-Streuversuchen** im Bereich **höchster Energien** sind allerdings eine Reihe wesentlicher Änderungen zu beachten und Schwierigkeiten zu überwinden.

a) Es handelt sich hier um **hochrelativistische Stoßprozesse**, und es müssen die entsprechenden Formeln verwendet werden.

b) Impuls-Übertragung, Wechselwirkungsenergien und Materiewellen sind im **Schwerpunkt-System** zu betrachten /11/. - Auch bei einem Auto-Zusammenstoß sind natürlich die Relativ-Geschwindigkeiten und nicht die Geschwindigkeiten gegenüber einem ruhenden Beobachter für die Folgen wesentlich.

c) Für den Stoß eines sehr schnellen leichten Elektrons mit der hochrelativistischen Energie E_1 gegen ein ruhendes Nukleon der Masse m_1 ergeben die **relativistischen Formeln** eine deutlich verringerte Energie E_{SPS} im Schwerpunkt-System wobei näherungsweise gilt /11/

$$E_{SPS} = \sqrt{2E_1 \cdot m_1 c^2}. \quad (11)$$

Der Stoß von 8 GeV-Elektronen mit ruhenden Protonen liefert z.B. nur effektiv 4

GeV (im Schwerpunkt-System) und damit nach Gl. (II) Materiewellenlängen $\lambda_M = 0,3$ fm; die 20 GeV-Elektronen erzeugen effektiv 6 GeV mit $\lambda_M = 0,2$ fm. Wir können also Auflösungsrenzen $\Delta x = \lambda/2$ bis in den 1/10 fm-Bereich erwarten, allerdings nur, wenn Streuwinkel bis zu 180° (also auch Rückstreuungen) erfaßt werden.

d) Die im Stoß umgesetzten Energien reichen für die **Erzeugung** neuer schwerer **Elementarteilchen**. Die Ruhe-Energie der Nukleonen beträgt 0,94 GeV und der π -Mesonen 0,14 GeV /21/. Es ergeben sich daher zumeist tief inelastische Stöße, verbunden mit Erzeugung neuer Teilchen oder Anregung von Resonanzen. - Für die Auflösung ist die vergrößerte Materiewellenlänge λ' der Elektronen nach dem Stoß wesentlich. - Allerdings können aus Messungen von Energie und Impuls der gestreuten Elektronen noch zusätzliche Informationen gewonnen werden.

e) Die **Bindungs-Energie** der Quarks im Nukleon ist bereits etwa gleich ihrer Ruheenergie. Damit verlieren aber diese Subteilchen z.T. schon ihre **Individualität**. Es scheint ja auch unmöglich zu sein, freie Quarks zu erzeugen. - Die Nukleonen im Atomkern bewahren dagegen wegen der geringeren Bindungsenergie ($E_B \ll m_0 c^2$) noch weitgehend ihre Individualität. - Dagegen wird zumindest unterhalb der Quark-Ebene der **Subteilchen-Begriff** sehr **fragwürdig** /18/; hier müßte nämlich das Verhältnis von Bindungs- zu Ruhe-Energie deutlich größer als 1 werden ($E_B \gg m_0 c^2$). Stoß- und Streuprozesse an derart fest gebundenen Subteilchen wären vermutlich nicht zu unterscheiden von denen am Gesamtsystem; d. h. eine eventuell vorhandene Unterstruktur wäre aus Streuprozesse nicht mehr erkennbar. - Vielleicht gibt es daher auch keine kleineren Strukturen oder man kann sie prinzipiell nicht mehr auflösen. Vielleicht wird aber die Frage nach kleineren Strukturen unterhalb der Quarks auch physikalisch sinnlos /15/.

f) Die **volle Auflösung** $\Delta x = \lambda/2 = 0,1$ fm bei der Streuung von 20 GeV-Elektronen mit der Schwerpunktsenergie $E_{SPS} = 6$ GeV und der Materiewellenlänge $\lambda_M = 0,2$ fm erreicht man nur, wenn Streuwinkel bis 180° erfaßt werden. In den ersten **Versuchen** der oben genannten Autoren konnten mit dem 450 Tonnen schweren, 22 m langen und um das Target schwenkbaren Nachweis-Spektrometer /19/. Energie und Impuls nur für die in kleine Streuwinkel bis $\alpha = 10^\circ$ unelastisch gestreuten Elektronen gemessen werden, was aber zur Auflösung noch nicht ausreichte. Erst die Erweiterung bis zu 34° ermöglichte Rückschlüsse auf die Konstituenten der Nukleonen /16/. - Dem entsprechen aber gerade die nach Gl. (4) **wellenoptisch** berechneten **Auflösungsgrenzen** ($\varphi_A = 10^\circ \Rightarrow \Delta x = 0,6$ fm; $\varphi_A = 34^\circ \Rightarrow \Delta x = 0,2$ fm), wobei φ_A der bei der Messung erfaßte Streuwinkel ist.

g) Obwohl derartige **Hochenergie-Elektronenstreuungs-Messungen**, ihre Auswertung und die zugrunde liegende Theorie extrem kompliziert sind /11,15-20/, lassen die vorgestellten einfachen wellenoptischen Analogien immerhin eine Abschätzung zu, ob eine Auflösung überhaupt möglich ist. Wie diese sich erreichen läßt, was für grundlegende Zusammenhänge und Wechselwirkungen vorliegen, ist eine ganz andere und viel kompliziertere Fragestellung.

Literatur

- /1/ G. Koppelman, M. A. Krumbügel, M. Totzeck: a) Beugung und Auflösung; b) Versuche zum Auflösungsvermögen der Photokamera, des Tageslichtprojektors und des Auges; Praxis d.N. (Physik) 40, Heft 5 (1991) S. 9 - 13; 14 - 19;
- /2/ H. Niedrig: Die Anfänge der Elektronenmikroskopie. Phys. u. Didakt. 15 (1987) S. 52 - 64
- /3/ K. Urban: Hochauflösende Elektronenmikroskopie. Phys. Blätter 46 (1990) Nr. 3 S. 77 - 84
- /4/ G. Koppelman, H. Rudolph: Photographische Beugungsobjekte für den Unterricht. Phys. u. Didaktik 5 (1977) S. 220 - 229
- /5/ G. Koppelman, O. Ehrmann: Eine Einführung der Lichtbeugung mit einfachen Experimenten und Moiré-Demonstrationen. Praxis d.N. (Physik) 34, Heft 2 (1985) S. 9 - 15; (Nachdruck im Kursskript "Moderne Optik")
- /6/ R. Bergsten: Optical Crystals. Am. J. Physics 42 (1974) S. 91 - 99
- /7/ G. Koppelman: Lichtoptische Analogieversuche zur Kristallgitterbeugung I/II. Phys. u. Didaktik 9 (1981) S. 314 - 329; 10 (1982) S. 47 - 66; Praxis d.N. (Physik) 40, Heft 5 (1991) S. 19 - 23
- /8/ C. Gerthsen, H.O. Kneser: Physik. Springer-Verlag, Berlin 10. Aufl. (1969) S. 347, 536 und andere Experimentalphysik Lehrbücher
- /9/ W. Finkelburg: Einführung in die Atomphysik. Springer-Verlag, Berlin, 4. Aufl. (1956) S. 252, 267 u.a.
- /10/ R. Sexl, E. Streeruwitz: Streuung als Mittel der Strukturforschung. Phys. u. Didaktik 4 (1976) S. 245 - 258
- /11/ H. Hilscher: Elementarteilchen. Teil I. Phys. u. Didaktik 16 (1988) S. 182 - 198
- /12/ V.F. Weisskopf: Moderne Physik aus elementarer Sicht. Teil 1. Phys. u. Didaktik 12 (1984) S. 1 - 9
- /13/ H. Niedrig: Wellencharakter der Materie. In: L. Bergmann, C. Schaefer, H. Gobrecht: Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. III, Optik. De Gruyter-Verlag, Berlin, 8. Aufl. 1987, S. 943 - 1003
- /14/ D. Dubbers: Teilchenphysik mit langsamen Neutronen. Phys. Blätter 45 (Nr. 5, 1989) S. 133 - 138
- /15/ H. Schopper: Auf der Suche nach den Grundelementen der Materie. Phys. Blätter 44 (Nr. 8, 1988) S. 319 - 324
- /16/ G. Wolschin: Nobelpreis für Physik. - Substruktur der Nukleonen. Spektrum d. Wiss. (Dez. 1990) S. 18 - 22
- /17/ R. Hofstadter: Die Elektronenstreuung und ihre Anwendung auf die Struktur von Kernen und Nukleonen. Phys. Blätter 18 (Nr. 5, 1962) S. 193 - 206
- /18/ P. Brix: Größe und Form der Atomkerne. - Die Ladungsverteilung. Naturwiss. 64 (1977) S. 293 - 302
- /19/ G. Weber: Das Quark-Modell wird etabliert. Phys. Blätter 46 (Nr. 11, 1990) S. 438 - 441
- /20/ G.B. Lubkin: Friedman, Kendall and Taylor Win Nobel Prize for First Quark Evidence. Physics Today 44 (Jan 1991) S. 17 - 20
- /21/ W. Weise: Subnukleare Physik. - Theoretische Konzepte und experimentelle Beispiele. Phys. Blätter 45 (Nr. 10, 1989) S.391 - 397