

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 2

Anregungen für Unterricht und Lehre

ISBN 3 - 7896 - 0100 - 4

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1991

Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle
genutzt werden. Auf der Homepage

www.solstice.de

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

Eine Spielzeugautobahn (DARDA-Bahn) im Physikunterricht

1. Vorbemerkung

Spielzeuge können in vielen Fällen eine Bereicherung für den Physikunterricht darstellen. Ein für den Mechanikunterricht in der 11. Klasse besonders geeignetes „Spielzeug“ ist nach unserer Unterrichtserfahrung die sogenannte DARDA-Bahn [1], eine Autorennbahn im Maßstab 1:60, die sich einmal durch die vielfältigen Gestaltungsmöglichkeiten der „Rennbahn“ und zum anderen durch den raffiniert konstruierten Motor der Autos auszeichnet. Die DARDA-Bahn hat seit ihrem Erscheinen im Jahr 1975 große Verbreitung gefunden, was u.a. auf die besonderen Eigenschaften des DARDA-Motors zurückzuführen ist. Es handelt sich um einen Federmotor mit einem trickreichen Aufziehmechanismus. Der Motor wird durch einfaches Vor- und Zurückschieben bei leichtem Druck auf den hinteren Teil des Autos aufgezogen. (Eine detaillierte Beschreibung des Motors findet man z.B. in [2].)

Für den Einsatz im Mechanikunterricht der 11. Klasse sprechen u.a. folgende Argumente:

- Bei einem Spielzeug sind die Schüler stärker motiviert. Sie können ihre eigene Spielerfahrung in den Unterricht einbringen.
- Die phantastischen Fahrleistungen der Autos sind besonders überraschend. Würde man die Fahrleistung der Autos auf reale Verhältnisse umrechnen, so ergäbe sich eine Maximalgeschwindigkeit von ca. 1000km/h und eine Beschleunigung von 0 auf 100km/h in 0.1s.
- Die Bahnelemente sind aus flexiblem Kunststoff hergestellt. Es lassen sich sowohl in der Ebene als auch im Raum interessante Bahnkonfigurationen einfach verwirklichen. Die Bahnelemente und Autos sind relativ preiswert, so daß ihre Anschaffung als Demonstrations- oder Schülerübungsgerät leicht möglich ist.

Auch uns Lehrern hat der Einsatz der Bahn im Unterricht viel Spaß gemacht, was sicher zum Unterrichtserfolg beigetragen hat.

Von den vielfältigen Einsatzmöglichkeiten der DARDA-Bahn, die wir in unserem Unterricht erprobt haben, wird im folgenden exemplarisch über folgende Aspekte berichtet:

- Kräfte bei einer Schleifenfahrt;
- Computersimulation zur Berücksichtigung der Reibung bei einer Schleifenfahrt;
- Vergleich der Bewegung des DARDA-Autos mit der einer Kugel.

2. Die Schleifenbahn

2.1 Beschreibung des Versuchsaufbaus

Die von uns aus DARDA-Bahnelementen aufgebaute Schleifenbahn ist in Abb. 1 dargestellt. Bei einer Verwendung im Unterricht empfiehlt es sich, die Starttrampe (Bahnabschnitt AC) auf eine feste Holzunterlage zu montieren, um zu gewährleisten, daß die Versuchsergebnisse reproduzierbar sind, der Neigungswinkel fest bleibt und ein Neuaufbau schnell erfolgen kann.

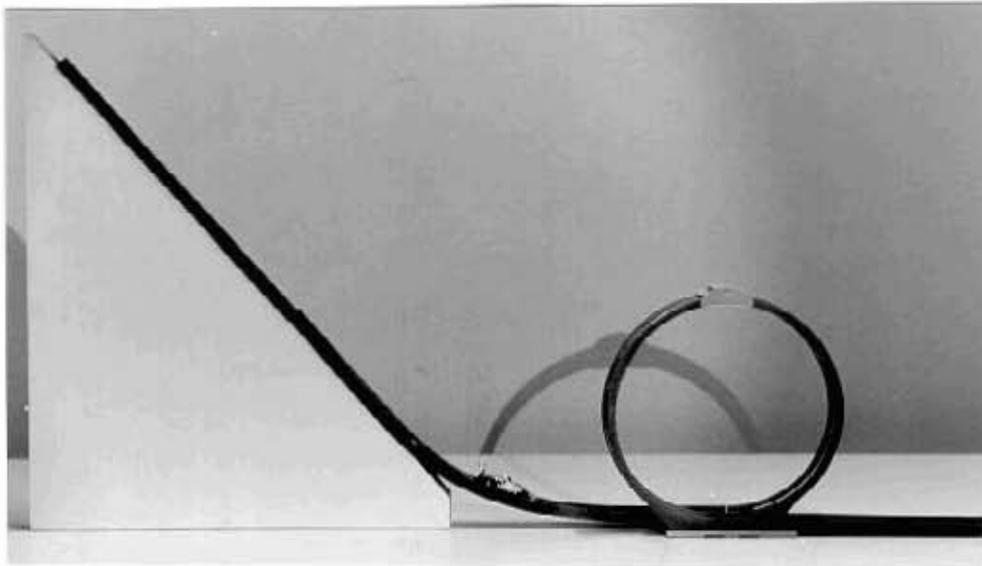


Abb. 1a: Fotografie der aus DARDA-Elementen aufgebauten Schleifenbahn

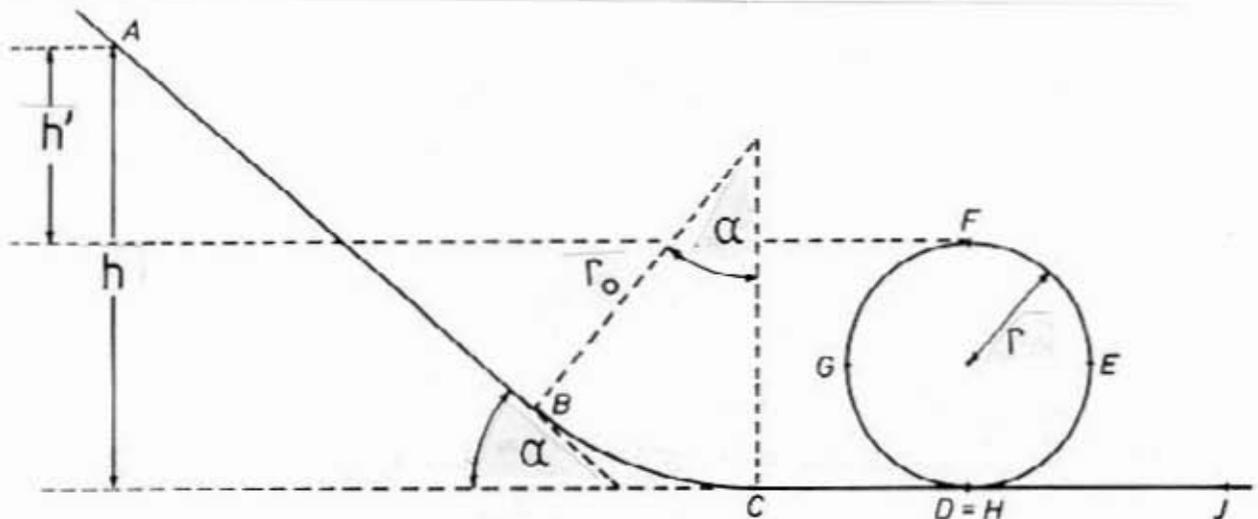


Abb. 1b: Skizze der Schleifenbahn mit der Angabe der für die Diskussion und die Berechnungen wichtigen Größen und Bezeichnungen. Abmessungen der Schleifenbahn: $\alpha = 42^\circ$, $CD = 0,15\text{m}$, $r_0 = 0,268\text{m}$, $r = 0,115\text{m}$; auf den Schwerpunkt des Autos bezogen gilt: $r_0' = 0,268\text{m}$, $r' = 0,103\text{m}$.

Die hiermit mögliche Schleifenfahrt zeichnet sich durch folgende ausgezeichnete Bahnabschnitte aus: vom Startpunkt A durchfährt der Wagen zunächst eine schiefe Ebene

mit dem Steigungswinkel α bis zum Punkt B. Von B bis C ist die Bahn gekrümmt mit dem Radius r_0 und geht in C in einen horizontal verlaufenden Abschnitt über, der bis zur Schleifeneinfahrt D reicht. Ähnlich wie im Abschnitt BC durchfährt der Wagen in der Schleife eine Bahn mit konstantem Radius - jedoch jetzt einen vollständigen Kreis - bis er wieder zum Punkt D (H) kommt, um dann auf einem horizontal verlaufenden Abschnitt bis J auszulaufen. Man erwartet, daß dort, wo der Krümmungsradius von einem unendlich großen auf einen konstanten, endlichen Wert springt, physikalisch interessante Beobachtungen möglich sind, wie in Kap. 3.3.2 und 3.3.3 gezeigt werden wird. Für unsere Untersuchungen verwendeten wir zunächst ein DARDA-Auto mit ausgebautem Motor, um die Reibungsverluste klein zu halten. Bei diesem Auto liegt der Schwerpunkt 1,2cm oberhalb der Fahrbahn, so daß in den Rechnungen die effektiven Bahnradien $r_0' = 0,268$ m und $r' = 0,103$ m einzusetzen sind.

2.2 Qualitative Beschreibung der Kräfte in der Schleifenbahn

Für das Verständnis der physikalischen Vorgänge bei einer Schleifenfahrt ist vor allem die Beantwortung der Frage nach der notwendigen Anfangsenergie und dem Ursprung der Zentripetalkraft in der Schleife besonders wichtig.

Der Mindestwert für die Anfangsenergie ergibt sich aus der Bedingung, daß das Fahrzeug bei der Fahrt durch die Schleifenbahn gerade den Fahrbahnkontakt nicht verliert. Diese Anfangsenergie kann über die Starthöhe eingestellt werden, wobei ein Start mit $v_0=0$ vorausgesetzt ist. Mit „Schleifenbahn-Bedingung“ ist im folgenden der Fall gekennzeichnet, bei dem unter der Bedingung $v_0 = 0$ die Starthöhe gerade noch eine Schleifenfahrt zuläßt.

Unsere Betrachtungen erfolgen von einem Inertialsystem aus. Wir betonen dies, da häufig bei Darstellungen zur Kreisbewegung ein unmotivierter Wechsel zwischen Inertialsystem und beschleunigtem System vorgenommen wird, der zu unnötigen und dem physikalischen Verständnis nicht dienenden Erschwernissen führt.

Liegt eine Kreisbewegung vor, so ist die Frage nach dem Ursprung der Zentripetalkraft von besonderem Interesse. Bei der Schleifenfahrt verursacht der Wagen durch seine Massenträgheit eine elastische Verformung der Fahrbahn, die auf den Wagen übertragen wird. Der ruhende Beobachter interpretiert die entsprechende Rückstellkraft des Bahnmaterials als die auf den Wagen wirkende Zentripetalkraft. Kräfte, die durch elastische Bahnverformungen auf das Fahrzeug übertragen werden, wollen wir im folgenden als „Bahnkräfte“ bezeichnen.

Im unteren Teil der Schleifenbahn ist die Bahnkraft durch die Summe aus der zur Fahrbahn senkrechten Komponente der Gewichtskraft F_N (Normalkraft) und der Zentripetalkraft F_{ZP} gegeben.

Im oberen Halbkreissegment der Schleifenbahn wirken dagegen die zur Fahrbahn senkrechte Komponente der Gewichtskraft F_N und die Rückstellkraft der elastischen Bahnverformung F_B . Die notwendige Zentripetalkraft wird zum einen Teil von F_N und zum anderen Teil durch die Bahnkraft F_B aufgebracht, wobei $F_B = F_{ZP} - F_N$ gilt.

Die Zentripetalkraft ist in der oberen Hälfte der Schleifenbahn wegen der dort geringeren Geschwindigkeit des Wagens kleiner als in der unteren Hälfte.

Für den Fall einer reibungsfreien Bewegung kann man die zur Erfüllung der Schleifenbahn-Bedingung notwendige Mindeststarthöhe und die Mindestgeschwindigkeit im Scheitelpunkt der Schleifenbahn in Abhängigkeit vom Schleifenbahnradius angeben. Ist die Schleifenbahn-Bedingung erfüllt, dann ist die Bahnkraft im Punkt F gleich Null. In diesem Grenzfall liefert die Gewichtskraft gerade die notwendige Zentripetalkraft, und es gilt daher:

$$mg = m v_F^2 / r \quad (1)$$

Zusammen mit dem Energieerhaltungssatzes für dieses System:

$$0,5 m v_F^2 + mg2r = mgh \quad (2)$$

erhält man im Grenzfall für die Geschwindigkeit v_{grenz} im Punkt F und für die Starthöhe h_{grenz} :

$$v_{F_{\text{grenz}}}^2 = gr \quad \text{bzw.} \quad h_{\text{grenz}} = 2,5r \quad (3)$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, daß in jedem Punkt der Schleifenbahn die Bedingung $v^2/r \geq g$ erfüllt sein muß, damit das Fahrzeug den Fahrbahnkontakt nicht verliert. Für die in Abb. 1 gezeigte Schleifenbahnanordnung ergibt sich im Punkt F im Grenzfall eine Mindestgeschwindigkeit von $v_{F_{\text{grenz}}} = 1,0\text{m/s}$ und unter Voraussetzung einer reibungsfreien Bewegung eine Mindeststarthöhe von $h_{\text{grenz}} = 25,8\text{cm}$.

Überraschend ist, daß der Startpunkt A höher als der Schleifenbahnpunkt F liegen muß (vgl. Abb. 1b), damit die Schleifenbahn-Bedingung erfüllt ist. Dies liegt daran, daß einmal die unvermeidlichen Reibungsverluste berücksichtigt werden müssen und zum andern, daß der Punkt A immer - auch ohne Reibungsverluste - höher als der Punkt F liegen muß, da sonst die Geschwindigkeit im Punkt F Null wäre und das Auto vorzeitig herunterfallen würde.

2.3 Die DARDA-Doppelschleife

Bisher haben wir die Reibung vernachlässigt. Zur Demonstration der Bedeutung der Reibung haben wir die aus DARDA-Elementen bestehende, in Abb. 2 gezeigte Doppelschleifenbahn verwendet. Die Bahnkonfiguration besteht aus einer horizontalen, ovalen Rennbahn, bei der in einem Geradenstück zwei aufeinanderfolgende Schleifen S1 und S2 mit unterschiedlichen Krümmungsradien eingebaut sind. Zusätzlich sind in Abb. 2 drei Startpunkte A, A' und B markiert. Die Pfeile deuten die im Experiment gewählten Startrichtungen an. A und B sind so gewählt, daß bei der vorgegebenen Fahrtrichtung der bis zur Einfahrt in die jeweilige Schleife zurückgelegte Weg (ca. 2m) und damit die erreichte Geschwindigkeit gleich sind. A' liegt auf einem Geradenstück, das, wie in Abb. 2 angedeutet, noch nachträglich eingebaut werden kann. Der Abstand zwischen A' und der Schleifeneinfahrt von S1 beträgt ca. 4m. Ein von A gestarteter Wagen durchfährt zunächst das Steilstück der Schleife S1 mit großem Krümmungsradius, der bei B gestartete zuerst die Schleife S2 mit kleinerem Krümmungsradius. Die Wegstrecke vom Startpunkt A bis zum Scheitelpunkt von S1 (höchster Punkt der Bahn) ist kürzer als die Wegstrecke von B bis zum Scheitelpunkt von S1. Berücksichtigt man Reibungsverluste, so ist zu erwarten, daß für einen im Punkt A

gestarteten Wagen (kürzere Wegstrecke) die Energie eher ausreicht, den Scheitelpunkt von S1 zu erreichen, als für den in B (längere Wegstrecke) gestarteten Wagen. Überraschend ist, daß das Experiment diese Erwartung nicht erfüllt. Der in A gestartete Wagen - jetzt mit eingebautem Motor - fällt im oberen Bereich der zuerst durchfahrenen Schleife S1 aus der Bahn, während der in B gestartete beide Schleifen vollständig durchfährt.

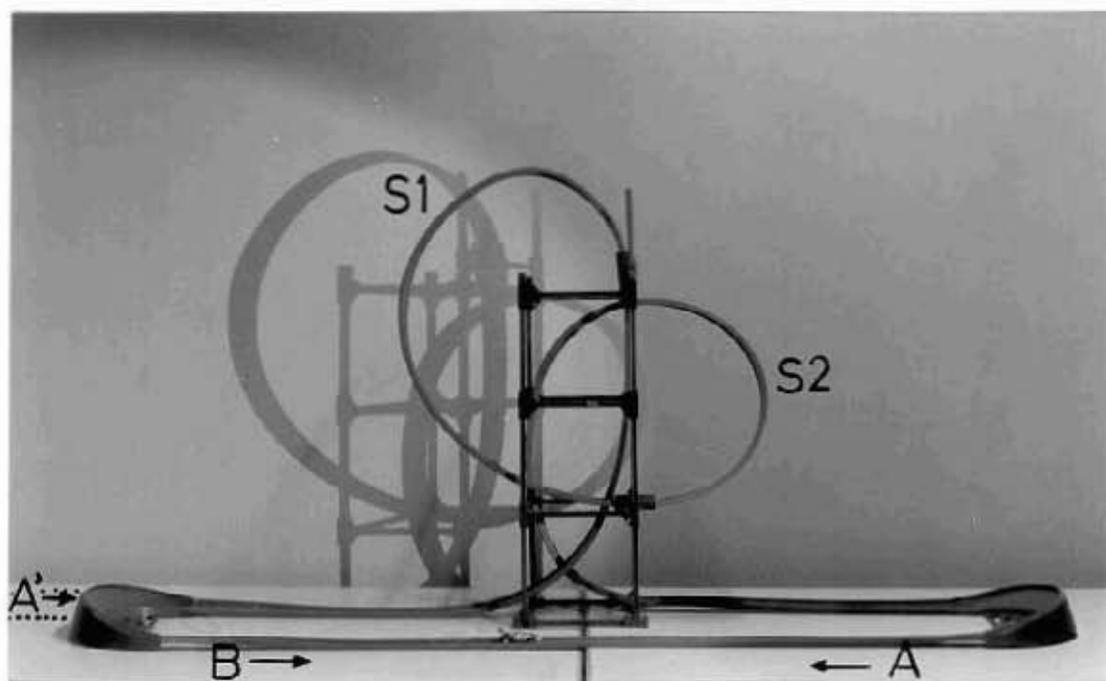


Abb. 2: Fotografie der DARDA-Bahn mit Doppelschleife

Diese Beobachtungen stehen scheinbar im Widerspruch dazu, daß die Hubarbeit bei Vernachlässigung der Reibung wegabhängig ist. Berücksichtigt man die Reibung, so ist die Hubarbeit zwar wegabhängig, die Reibung sollte sich jedoch auf dem kürzeren Weg weniger stark bemerkbar machen.

Dieser scheinbare Widerspruch hat seine Ursache darin, daß die Spannenergie der Feder erst nach ca. 4m vollständig abgegeben worden ist. Bis zur Einfahrt in die jeweilige Schleife hat der Wagen erst ca. 2m zurückgelegt, so daß der Wagen in der Schleife immer noch beschleunigt wird. Dabei ist zu beachten, daß der Wirkungsgrad für die Umwandlung von Spannenergie in Bewegungsenergie wesentlich durch die Haftreibung der Räder auf der Bahn bestimmt wird. Bei dieser Energieumwandlung spielt offensichtlich die Reihenfolge beim Durchfahren der Schleifen eine Rolle. Im Steilstück von S1 ist der Krümmungsradius größer als in S2. Daher ist die Bahnkraft und somit die Haftreibung in S1 kleiner als in S2. Dem in B startenden, zuerst durch S2 fahrenden Wagen kann somit auf seinem Weg mehr Energie zugeführt als dem in A startenden, zuerst durch S1 fahrenden Wagen. Der Versuch zeigt, daß die von A aus erreichte Geschwindigkeit beim Durchfahren von S1 für die Erfüllung der Schleifenbahnbedingung nicht ausreicht, so daß er herunterfällt.

Die Bedeutung der Haftreibung beim Antrieb (Energieübertragung) eines Autos kann

im Fall der Fahrt eines Autos auf schneegeletter Straße verdeutlicht werden. Besitzt das Auto einen Frontmotor mit Hinterradantrieb, so wird empfohlen, durch eine Zusatzladung (Sandsack) im Kofferraum den Andruck und damit die Haftreibung zu erhöhen.

Zur experimentellen Bestätigung obiger Überlegungen wird in einem zweiten Versuch dem DARDA-Auto eine genügend lange, geradlinige Strecke vor der Einfahrt in das Steilstück S1 zur Verfügung gestellt. Hierzu wird die Bahn aufgetrennt und in Richtung A' ein Geradenabschnitt der Länge 4m eingefügt. Startet man jetzt bei A', so durchfährt das Auto die Schleifen der Reihenfolge S1, S2 beide Schleifen auch vollständig.

3. Simulation der Schleifenfahrt auf einem Computer

Eine mathematische Beschreibung der Schleifenfahrt erlaubt Vorhersagen über die für die Bewegung charakteristischen Größen. Die Reibung spielt bei der Schleifenfahrt eine wichtige Rolle. Ihre Einbeziehung in die Beschreibung führt jedoch zu analytisch nicht geschlossen lösbaren Ausdrücken. Der Grund hierfür ist, daß die Bahnkraft in der Schleife sowohl von der Geschwindigkeit (Zentripetalkraft) als auch vom Ort (Gravitation) abhängt. Um dennoch Vorhersagen treffen zu können, haben wir die Schleifenfahrt nach Abb. 1 auf einem Rechner simuliert. Für die Simulation wurde ein DARDA-Auto mit ausgebautem Motor vorausgesetzt, für das in guter Näherung angenommen

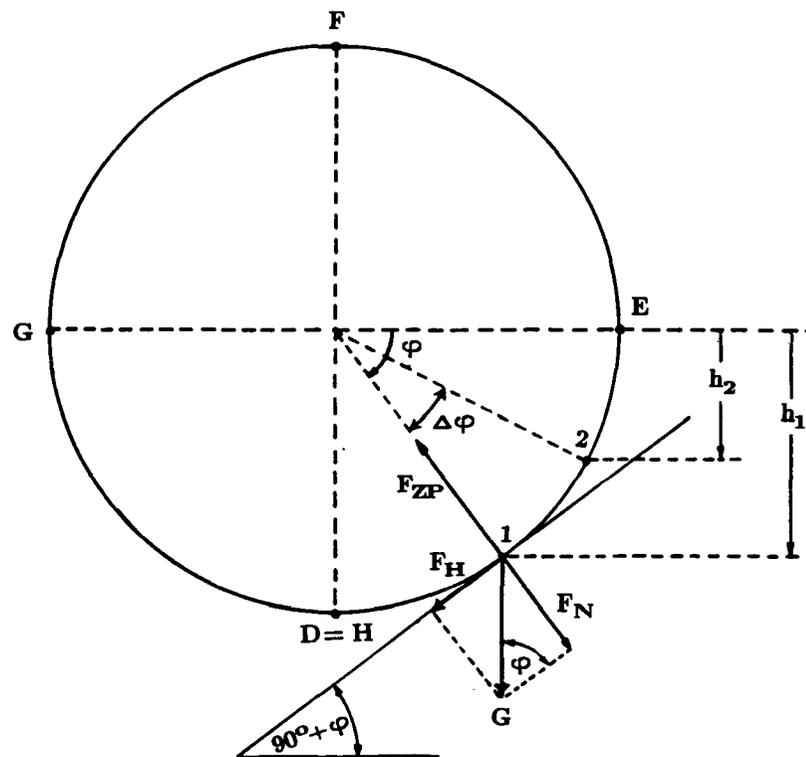


Abb. 3: Skizze zur Veranschaulichung der in der Simulation verwendeten Größen.
 F_H : Hangabtriebskraft, F_N : Normalkraft, G : Gewichtskraft F_G .
 Es gilt: $h_1 = r \sin \varphi$ und $h_2 = r \sin(\varphi + \Delta \varphi)$; Nullpunkt von φ gemäß Gl. (4);
 h_1 und h_2 sind auf die Horizontale GE bezogen

werden kann, daß der Luftwiderstand und die Rotationsenergie der Räder vernachlässigbar sind und daß der Rollreibungskoeffizient längs der Bahn konstant ist. Die Starthöhe ist jeweils so gewählt, daß die Schleifenbahn-Bedingung erfüllt ist.

3.1 Kräftezerlegung an einer beliebigen Stelle der Schleifenbahn

Die Simulation der Fahrt durch die kreisförmige Schleife wird durch die Verwendung von Polarkoordinaten besonders einfach. Für den Winkel φ , der den Ort des Autos in der Schleife angibt, wurde folgende, in Abb. 3 erläuterte Zuordnung zu den eingezeichneten Bahnpunkten getroffen:

$$\varphi_D = -90^\circ, \varphi_E = 0^\circ, \varphi_F = 90^\circ, \varphi_G = 180^\circ, \varphi_H = 270^\circ. \quad (4)$$

Diese Wahl des Nullpunktes und der Zählrichtung hat den Vorteil, daß für die senkrecht auf das Fahrzeug wirkende Bahnkraft F_B in jedem Bahnpunkt gilt:

$$F_B = F_{ZP} - F_N = m \left(\frac{v^2}{r} - g \sin \varphi \right) \quad (5)$$

und daß sich für F_N in der oberen bzw. unteren Loopinghälfte automatisch das richtige Vorzeichen ergibt. Die Höhenangaben werden auf die Horizontale GE bezogen.

3.2 Beschreibung des Algorithmus für die Simulation

Der Simulation liegt folgende Idee zugrunde. Die Zeit, während der die Bewegung abläuft, zerlegt man in einzelne Intervalle Δt und berechnet hierfür die charakteristischen Größen der Bewegung, die dann als Anfangswerte für das darauffolgende Intervall dienen. Der Zeitschritt Δt muß so klein gewählt werden, daß im Intervall die Krümmung näherungsweise konstant ist und daß der im Intervall zurückgelegte Weg Δs bzw. der überstrichene Winkel $\Delta \varphi$ durch $\Delta s = v_1 \Delta t$ und $\Delta \varphi = (v_1/r) \Delta t$ in guter Näherung gelten, wobei v_1 die Geschwindigkeit bei Eintritt in das Intervall darstellt. Für $\Delta t = 0,001s$ waren diese Annahmen gut erfüllt. Innerhalb des Zeitintervalls wird dann die Reibungsarbeit W_R verrichtet:

$$W_R = F_R \Delta s = \mu F_B \Delta s = \mu F_B \Delta \varphi, \quad (6)$$

und man erhält am Ende des Zeitintervalls die kinetische Energie:

$$W_{kin2} = W_{kin1} - W_R - W_{hub}; \quad \text{mit } W_{hub} = mg(h_1 - h_2) \quad (7)$$

Daraus läßt sich die Geschwindigkeit v_2 am Ende des betrachteten Zeitintervalls Δt berechnen, mit der im darauffolgenden Zeitintervall die Rechnung wieder begonnen wird. Mit der im jeweiligen Intervall erreichten Geschwindigkeit, dem zugehörigen Winkel φ und der Bahnkraft läßt sich mit Glg. (5) die Radialbeschleunigung in dem Intervall angeben:

$$a(\varphi) = F_B/m = v^2/r - g \sin \varphi \quad (8)$$

Insgesamt erhält man mit diesem Iterationsverfahren nach dem Durchlaufen sämtlicher Zeitintervalle die für die Bewegung charakteristischen Größen als Funktion des Ortes und der Zeit. Als Anfangsbedingung wurde festgelegt, daß der Wagen gerade die Schleifenbahnbedingung erfüllt (Glg. (1)). Daraus ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit für den ersten Iterationsschritt.

Der letzte noch unbekannte Parameter in der Rechnung ist der Wert des Reibungskoeffizienten μ auf ebener Strecke. Dieser wurde durch einen Ausrollversuch experi-

mentell bestimmt. Hierzu wird das Auto aus der Höhe h auf einer Bahn wie in Abb. 1 - allerdings ohne Schleife - zunächst beschleunigt und auf dem horizontalen Abschnitt rollt es bis zum Stehen aus. Aus der Höhe h und der horizontal verlaufenden Wegstrecke kann dann der Reibungskoeffizient bestimmt werden. Ähnlich geht man auch in der Automobilindustrie vor. Wir erhielten bei einer Starthöhe $h=12\text{cm}$ einen mittleren Ausrollweg von 240cm , was einem Wert $\mu = 0.05$ entspricht.

3.3 Ergebnisse der Computersimulation

3.3.1 Zum Reibungskoeffizienten

Mit Hilfe der Simulation ist es möglich, den Reibungskoeffizienten μ an reale Meßdaten für die Geschwindigkeit anzupassen. Hierfür wurde in den Punkten D und H die Geschwindigkeit des Wagens für verschiedene Starthöhen gemessen. Die beste Übereinstimmung ergab sich für $\mu = 0,055$. Die Abweichung vom gemessenen Reibungskoeffizienten liegt innerhalb des Meßfehlers.

3.3.2 Zu den Komponenten in Bewegungsrichtung

In Abb. 4 und Tabelle 1 sind das t-v-Diagramm und die Geschwindigkeitswerte für die Punkte der Bahn gemäß Abb. 1 angegeben, wie sie aus der Simulation erhalten wurden.

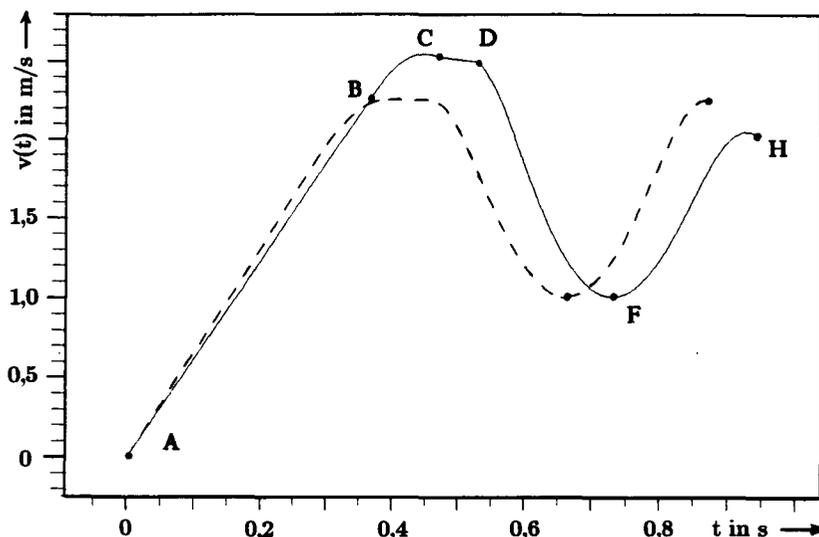


Abb. 4: t-v-Diagramm als Ergebnis der Computersimulation für die in Abb. 1 gezeigte Bahn (Punkt A bis H). --- : $v(t)$ ohne Reibung (Start bei A; $h_0 = 0,258\text{ m}$); — : $v(t)$ mit Reibung (Start bei A, $h_0 = 0,378\text{ m}$); Start jeweils für $t = 0$.

	t in s	v in m/s	
A	0,00	0,00	
B	0,39	2,38	
C	0,47	2,52	
D	0,53	2,49	Starthöhe: $h_0 = 0,378\text{ m}$
E	0,60	1,79	
F	0,73	1,01	
H	0,95	2,02	

Tab. 1: Zeit und Geschwindigkeit für die Bahnpunkte in Abb. 1.

Besonders interessant sind die Werte für die Punkte B, C und D, da hier - wie vorher erwähnt - abrupt zusätzlich die Zentripetalkraft wirksam wird. Zunächst erwartet man, daß hiervon die Komponenten in Bewegungsrichtung nicht betroffen sind. Es zeigt sich, daß diese Vermutung nur bedingt richtig ist. Im einzelnen ergeben sich folgende Fakten:

- Die längs der Schleifenbahn auftretende maximale Geschwindigkeit ist im Fall mit Reibung größer als im Fall ohne Reibung. Dies liegt daran, daß zur Einhaltung der Schleifenbahn-Bedingung im Fall mit Reibung aus einer größeren Höhe gestartet werden muß als im Fall ohne Reibung.

- Für die Beschleunigung auf der Startrampe im Bahnabschnitt AB gilt:

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = 6,1 \text{ m/s}^2. \quad (9)$$

- Im gekrümmten Bahnabschnitt BC nimmt die Beschleunigung bis auf den Wert Null ab. Die Ursache hierfür ist einmal die mit dem kleiner werdenden Neigungswinkel α einhergehende Abnahme der Hangabtriebskraft. Zum anderen nimmt die Reibungskraft in diesem Bahnabschnitt zu, da aufgrund der Krümmung die Bahnkraft wirksam wird. Für die Beschleunigung im Punkt B bzw. C erhält man:

$$a_{B,C} = g \sin \alpha - \mu (g \cos \alpha + v_{B,C}^2 / r'_0); \quad (10)$$

mit $\alpha=42^\circ$ bzw. $\alpha=0$ ist dann: $a_B = 5,1 \text{ m/s}^2$ bzw. $a_C = -1,8 \text{ m/s}^2$.

- Das Diagramm in Abb. 4 bestätigt, daß bereits vor Erreichen des Punktes C die Reibungskraft größer als die Hangabtriebskraft wird, wodurch bereits eine Verzögerung eintritt. Ferner stellt man fest, daß ohne Einfluß der Reibung die Beschleunigung bis zum Punkt C stets positiv ist.

- Die Bewegung im horizontal verlaufenden Bahnabschnitt CD ist konstant verzögert mit $a = -\mu g = -0,55 \text{ m/s}^2$. Unter Vernachlässigung der Reibung würde sich das Auto mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

- Beim Passieren des Punktes D (Einfahrt in die Schleife) nimmt die Geschwindigkeit stark ab. Für die Verzögerung a_D im Punkt D gilt mit Tab. 1:

$$a_D = -\mu (g + v_D^2 / r') = -3,9 \text{ m/s}^2. \quad (11)$$

- Der Verlauf der Beschleunigung in Bewegungsrichtung weist in den Punkten B, C und D Unstetigkeitsstellen auf, wie aus dem Vergleich der jeweiligen Beschleunigung direkt vor und hinter dem betreffenden Punkt ersichtlich ist:

$$\begin{aligned} \Delta a_B &= g \sin \alpha - \mu (g \cos \alpha + v_B / r'_0) - (g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha) \\ &= -\mu v_B^2 / r'_0 = -1,2 \text{ m/s}^2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta a_C = -\mu v_C^2 / r'_0 = -1,3 \text{ m/s}^2 \quad \text{und} \quad (13)$$

$$\Delta a_D = -\mu (g + v_D^2 / r') - (-\mu g) = -\mu v_D^2 / r' = -3,4 \text{ m/s}^2. \quad (14)$$

Die Unstetigkeitsstellen treten auf, weil an diesen Stellen ein Sprung von einem unendlichen Krümmungsradius auf einen endlichen, konstanten Wert - oder umgekehrt - auftritt. Zunächst überrascht dieses Ergebnis, da in Bewegungsrichtung der Einfluß der Radialkräfte nicht bemerkbar sein sollte. Allerdings zeigen Glg. (12) - (13), daß der Sprung nur dann auftritt und sichtbar wird, wenn die Reibung berücksichtigt wird und μ genügend groß ist.

- Im Punkt F ergibt sich die in Kap. 2.2. berechnete Geschwindigkeit von $v_F = 1,0 \text{ m/s}$.
- Für die Energie in den einzelnen Punkten erhält man für das DARDA-Auto (ohne Motor, $m=31 \text{ g}$) folgende Werte:

P	E_{ges}	ΔE
A:	$E = m g h_0 = 115,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$	
D:	$E = 0,5 m v_D^2 = 96,1 \cdot 10^{-3} \text{ J}$	$\Delta E = 18,9 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
F:	$E = m g 2r' + 0,5 m v_F^2 = 78,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$	$\Delta E = 17,6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
H:	$E = 0,5 m v_H^2 = 63,2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$	$\Delta E = 15,3 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

Tab. 2: E_{ges} : Gesamtenergie des DARDA-Autos in den angegebenen Bahnpunkten P.
 ΔE : durch Reibung bedingter Energieverlust .

Für einen vollständigen Bahndurchlauf ergibt sich für den durch Reibung entstandenen Energieverlust $\Delta E_{\text{ges}} = 51,8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$; dies sind 45% der Anfangsenergie.

3.3.3 Zur Radialbeschleunigung in der Schleifenbahn

Im Rahmen der Simulation ist die Berechnung der Radialbeschleunigung $a_r(\varphi)$ von besonderem Interesse, da jeder die Ergebnisse als Fahrgast in einer Achterbahn durch sein eigenes Fahrerlebnis „überprüfen“ kann. In Abb. 5 ist der so erhaltene Verlauf für $a(\varphi)$ bereits umgerechnet in $a_r(s)$ angegeben, wobei s den jeweils auf den Startpunkt bezogene, zurückgelegte Weg darstellt. Wir wählten diese Darstellung, da sie für die folgende Betrachtungen günstiger ist.

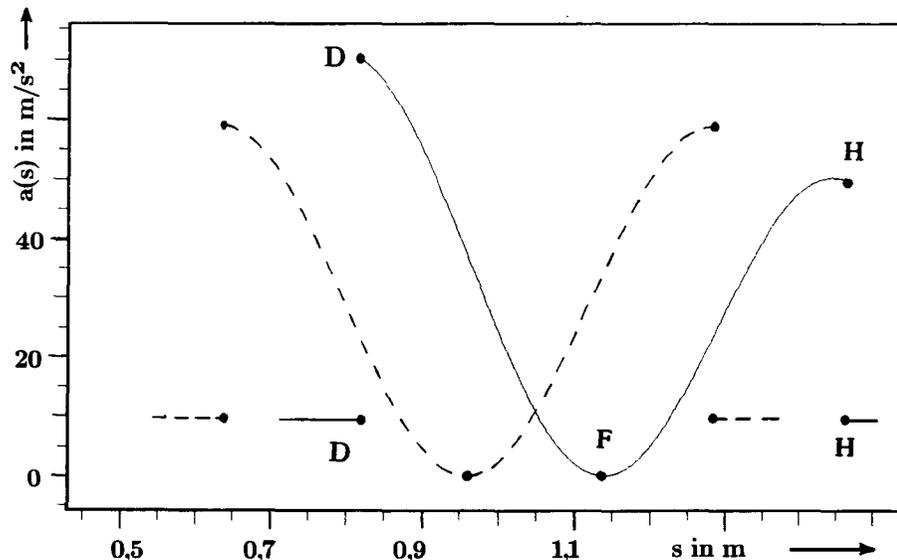


Abb. 5: Beschleunigung a_r in Abhängigkeit vom insgesamt zurückgelegten Weg s .
 —: mit Reibung ———: ohne Reibung (sonst wie in Abb. 4)

Der in Abb. 5 dargestellte Verlauf der Radialbeschleunigung zeigt in den Bahnpunkten D und H ein unstetiges Verhalten, das sowohl im Fall mit Reibung als auch im

Fall ohne Reibung vorhanden ist, jedoch unterschiedlich stark auftritt. Im Punkt D springt die Radialbeschleunigung von g auf $7g$ und in H von $5g$ zurück auf g . Zwischen den Punkten D und H ändert sich $a_r(s)$ dagegen stetig. Zur Einhaltung der Schleifenbahn-Bedingung ist im Fall mit Reibung eine größere Starthöhe nötig, was zu einem längeren Weg s bis zum Erreichen der Schleifeneinfahrt führt als im Fall ohne Reibung. Dies macht sich in Abb. 5 durch eine Verschiebung der Punkte D, F und H bemerkbar. Unter den gegebenen Anfangsbedingungen gilt im reibungsfreien Fall $a_r(\varphi) = 3g(1 - \sin\varphi)$. Dies entspricht dem gestrichelten Kurvenverlauf. Hierfür ist das Diagramm in Abb. 5 unabhängig von den Bahnabmessungen und gilt sowohl für die DARDA-Bahn als auch für eine Jahrmarktsachterbahn.

Die Sprünge im Verlauf von $a_r(s)$ sind wie im Fall 3.3.2 auf das abrupte „Ein- bzw. Ausschalten“ der konstanten Zentripetalkraft im Punkt D bzw. H zurückzuführen. Im Fall der Radialkomponente sind die Sprünge jedoch wesentlich größer als im Fall der Beschleunigungskomponente in Bewegungsrichtung (Kap. 3.3.2). Derartig rasche und ungewöhnlich große Wechsel der Beschleunigung wären für den „untrainierten“ Fahrgast einer Achterbahn sehr unangenehm und sind ihm nicht zuzumuten. Allerdings sind sie für den Blutkreislauf nach [6] noch nicht lebensgefährlich.

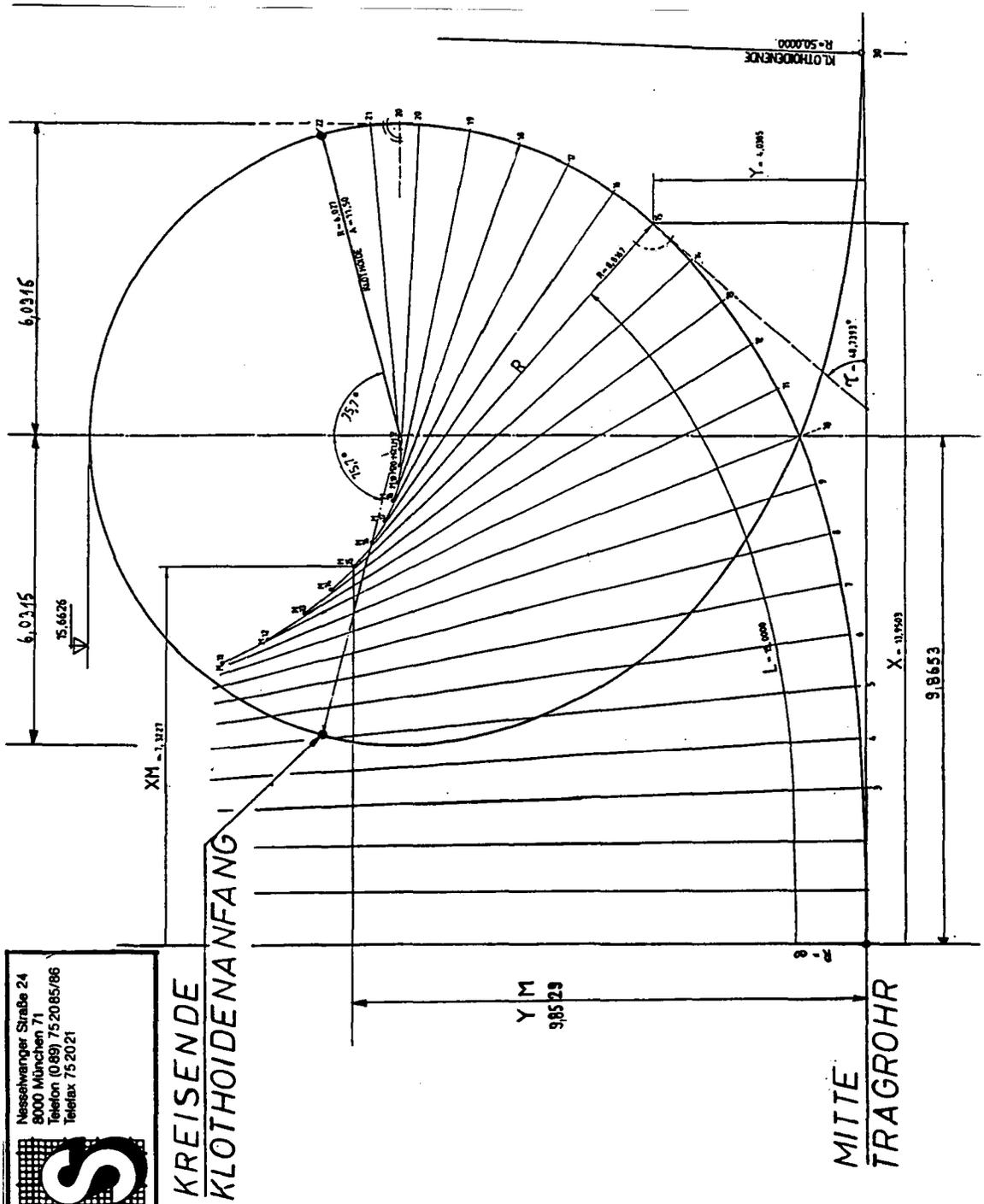
Wie muß nun eine Achterbahn konstruiert sein, damit die oben beschriebenen Sprünge der Radialbeschleunigung gemindert werden und dennoch die Schleifendurchfahrt mit einem „angenehmen“ Sensationsgefühl möglich wird? Die Lösung des Problems besteht darin, die Bahn so zu formen, daß der Verlauf der Radialbeschleunigung keine Unstetigkeitsstellen mehr aufweist. Dies erreicht man durch den Trick, den Krümmungsradius vom Einfahrtspunkt der Schleifenbahn bis zum Scheitelpunkt von einem unendlich großen Wert auf den passenden, endlichen Wert kontinuierlich abnehmen zu lassen.

Gekrümmte Kurven mit veränderlichem Krümmungsradius wurden bereits von Euler genauer mathematisch untersucht. Eine von ihnen ist die sogenannte Klothoide, eine Spiralkurve, deren Krümmungsradius umgekehrt proportional zur Bogenlänge abnimmt (vgl. z.B. [5]).

Abb. 6 belegt, daß dieser Trick in der Praxis beim Bau von Achterbahnen berücksichtigt wird. Es handelt sich um die Verkleinerung (ca. 4-fach) einer Konstruktionszeichnung für eine Jahrmarktsachterbahn. Die Zeichnung wurde uns freundlicherweise von dem für den Bau verantwortlichen Ingenieurbüro [8] zur Verfügung gestellt. Es fällt auf, daß die Bahn im auf- und absteigenden Ast aus zwei gleichartigen Klothoidenabschnitten und im oberen Teil aus einem Kreisbogensegment besteht.

Das Problem des abrupten „Einschaltens“ der Zentripetalkraft tritt im Straßenverkehr beim Einfahren in eine Kurve auf. Auch hier werden Kurven dadurch „entschärft“, daß der obige Trick mit der Klothoidenform bei der Auslegung der Kurven angewendet wird. Dies läßt sich auf Luftaufnahmen von Autobahnkreuzen deutlich erkennen.

Die Simulation wurde auch für eine Schleife mit den Klothoidenästen gemäß Abb. 6 mit folgenden Daten und Festsetzungen durchgeführt: Die Gesamthöhe der Schleife mit Klothoidenästen betrug $0,206\text{m}$ und wurde gleich der Gesamthöhe der kreisförmigen Schleife gewählt, um die Ergebnisse für beide Schleifen leichter vergleichen zu



Ingenieurbüro
 Dipl.-Ing.
WERNER STENGEL
 Statikbau
 Baustatik
 Maschinenbau
 Fliegende Bauten
 Computerabteilung

Nesselwanger Straße 24
 8000 München 71
 Telefon (089) 75 20 85/86
 Telefax 75 20 21

S

Abb. 6: Originalkonstruktionszeichnung für eine Achterbahnschleife mit Klothoidenästen und Kreissegment im oberen Teil. (ca. 4-fach verkleinert); T : Steigung der Tangente in einem Klothoidenpunkt.

können. Der Übergang zwischen Klothoidenabschnitt und Kreissegment im oberen Teil erfolgt dort, wo die Steigung der Tangente an die Klothoide den Wert $\tau = 104,3^\circ$ bzw. $\tau = 255,7^\circ$ beträgt (s. Abb. 6). Im übrigen wurde der Rest der Bahn so belassen, wie sie in Abb. 1b dargestellt ist.

Zur mathematischen Beschreibung der Klothoidenabschnitte wurden in der Simulation folgende, in Formelsammlungen zu findende Kenngrößen benutzt (s. [5], [8]):

$$L = A^2/R; \quad \tau = L^2/(2A^2); \quad R = A/\sqrt{2\tau}; \quad Y = A\sqrt{2\tau} \left\{ \frac{\tau}{1! \cdot 3} - \frac{\tau^3}{3! \cdot 7} + \frac{\tau^5}{5! \cdot 11} - \frac{\tau^7}{7! \cdot 15} \right\} \quad (15)$$

R: Bahnradius.

L: Länge des Klothoidenabschnitts vom Punkt mit Bahnradius ∞ bis zum Punkt mit Bahnradius R.

τ : Steigung der Tangente im Punkt P der Klothoide.

A^2 : Proportionalitätsfaktor zwischen L und R^{-1} ($A^2 = 0,0272$ für die gegebenen Abmessungen).

Y: Höhe des zu τ gehörenden Klothoidenstücks.

Die Höhe wird von dem Punkt aus gemessen, für den $\tau = 0$.

Für den durch die Bahndaten festgelegten Wert von A^2 ergibt sich für den Radius des Kreissegments im oberen Teil der Schleifenbahn $r' = 0,068\text{m}$. Im Fall der kreisförmigen Schleifenbahn ist $r' = 0,103\text{m}$. Hieraus folgt, daß bei der Schleifenbahn mit Klothoidenabschnitten bereits eine geringere Geschwindigkeit und damit eine geringere Starthöhe ausreicht, um bei sonst gleichen Parametern die Schleifenbahn-Bedingung zu erfüllen, als im Fall der kreisförmigen Schleifenbahn. Dies ist ein weiterer Vorteil der Klothoidenform. Die Simulation liefert für die neue Starthöhe den Wert $0,249\text{m}$ - für die kreisförmige Schleifenbahn beträgt er $0,258\text{m}$.

Ferner liefert die Simulation im Fall mit Reibung für $a_r(s)$ den in Abb. 7 dargestellten Verlauf, wobei s wieder auf den Startpunkt A bezogen ist. Man erkennt, daß der Einbau der Klothoidenäste den gewünschten Erfolg zeigt. Ausgehend von $a_r(s) = g$ im Abschnitt CD steigt $a_r(s)$ nach dem Passieren von D jetzt stetig an. Insgesamt ändert sich die Beschleunigung maximal nur noch um $4g$.

Unter Berücksichtigung der Reibung liefert die Simulation für die Klothoidenbahn eine Starthöhe von $h_0 = 0,371\text{m}$. Relativ zur Anfangsenergie beträgt der Reibungsverlust $39,8\%$ (für $\mu = 0,055$). Er ist damit kleiner als im Fall der kreisförmigen Schleifenbahn, bei der der Verlust 45% beträgt (Starthöhe $h_0 = 0,378\text{m}$). Der Betrieb einer Achterbahn mit Klothoidenästen sollte daher insgesamt wirtschaftlicher sein.

Ein weiterer Vorteil der DARDA-Bahn besteht darin, auch angenähert Klothoidenabschnitte nachbilden zu können und damit die Vorhersagen der Simulation überprüfen zu können. Hierzu ist ein Meßverfahren, wie es das ORVICO-System [9] darstellt, bestens geeignet. Mit einer Fernsehkamera wird bei diesem Verfahren ein an dem Auto befestigter heller Punkt aufgezeichnet, und mit einem Computer können die jeweiligen Ortskoordinaten des Punktes bei einer geeigneten Auswertung des Fernsehbildes bestimmt werden. Man erhält so alle für die Bewegung relevanten Daten. Wir planen entsprechende Messungen durchzuführen.

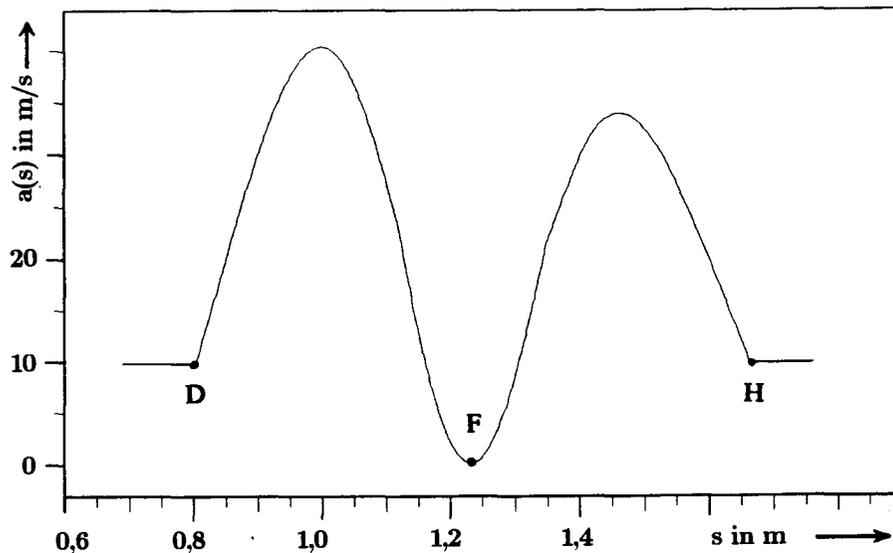


Abb. 7: $a_r(s)$ für eine durch den Einbau von Klothoidenästen modifizierte Schleife gemäß Abb. 6. für den Fall mit Reibung; Bezeichnungen wie in Abb. 5.

4. Einfluß der Rotationsenergie auf die Bewegung

Von Interesse ist die Frage, ob sich die Bewegung eines DARDA-Autos auf einer schiefen Ebene von der einer Kugel unterscheidet. Zur Untersuchung dieser Frage ist die Anordnung nach Abb. 1 gut geeignet, da einmal wegen der relativ großen Breite der Bahn Kugeln mit unterschiedlichem Radius verwendet werden können, ohne daß sich die Rollbedingung ändert und zum anderen, da mit der Schleife sofort die bei gegebener Starthöhe erreichte Geschwindigkeit qualitativ abgeschätzt werden kann. Man läßt z.B. den Wagen aus der Höhe $h_0 = 0,258\text{cm}$ starten, für die gerade die Schleifenbahn-Bedingung erfüllt ist, und untersucht, ob die Kugel (z.B. $R=0,8\text{cm}$) bei gleicher Starthöhe die Schleife durchfährt, oder in welcher Richtung man gegebenenfalls die Starthöhe zum Erreichen der Schleifenbahn-Bedingung verschieben muß.

Wir stellten fest, daß h_0 für die Kugel nicht ausreicht. Sie fällt vor Erreichen des höchsten Schleifenbahnpunktes aus der Bahn.

Diese zunächst überraschende Beobachtung kann mit der folgenden Abschätzung gedeutet werden, wobei angenommen wird, daß die Rollreibung vernachlässigt werden kann und daß die Rollbedingung auf der gesamten Bahn erfüllt ist. Diese Annahmen sind nach [7] zwar nicht realistisch, sie erlauben jedoch eine untere Abschätzung für die erreichte Geschwindigkeit. Hierzu wird die kinetische Energie der Kugel aufgeteilt in:

Translationsenergie: $W_{\text{trans}} = 0,5mv^2$ und Rotationsenergie: $W_{\text{rot}} = 0,5 J \omega^2$.

Aus der Rollbedingung $v = R\omega$ und der Formel für das Trägheitsmoment einer Kugel $J = 0,4mR^2$ ergibt sich für die Rotationsenergie: $E_{\text{rot}} = 0,2mv^2$. Der Energieerhaltungssatz kann daher in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} mgh_K &= mg2(r - R) + 0,5mv_F^2 + 0,2mv_F^2 \\ \Rightarrow gh_K &= g2(r - R) + 0,7v_F^2 \end{aligned} \quad (15)$$

(h_K : notwendige Starthöhe für die Kugel zur Erfüllung der Schleifenbahnbedingung).

Die Schleifenbahn-Bedingung liefert: $v_F^2 = g(r - R)$. Somit erhält man:

$h_K = 2,7(r - R) = 2,7(11,5\text{cm} - 0,8\text{cm}) = 0,289\text{m}$,
 was die Beobachtung bestätigt. Verwendet man an Stelle der kleinen Stahlkugel eine Kugel mit einem Radius von z.B. $R = 2,3\text{cm}$, so durchläuft diese Kugel die Schleifenbahn aus einer geringeren Starthöhe ohne den Kontakt zur Fahrbahn zu verlieren. Mit der Anordnung nach Abb. 1 kann somit der Einfluß des effektiven Bahnradius $(r - R)$ auf die Bewegung eindrucksvoll demonstriert werden.

5. Zusammenfassung

Es wurde am Beispiel der Schleifenfahrt gezeigt, daß die DARDA-Bahn nicht nur einen hohen spielerischen Wert besitzt, sondern daß sie sich auch zur Behandlung verschiedener Teilgebiete der Mechanik, wie z.B. Energieerhaltung, Reibung, Kreisbewegung und Rotation, eignet. Durch die Flexibilität im Aufbau und durch die Verbreitung bei Schülern kann sie Ausgangspunkt für eigene Forschungen zur Bewegungslehre darstellen.

Die vorgestellten Ideen wurden im Physikunterricht der 11. Jahrgangsstufe am Gymnasium erprobt. Einzelne Aspekte können auch – zumindest auf einem qualitativen Anspruchsniveau – in der Mittelstufe des Gymnasiums und an der Realschule behandelt werden.

Bei aller Begeisterung, die wir beim Einsatz der DARDA-Bahn spürten, möchten wir jedoch davon abraten, die Bewegungslehre nur noch mit der DARDA-Bahn durchzuführen. Auch hier sollte die Maxime gelten, daß Versuchsanordnungen, die in mehr als zwei aufeinanderfolgenden Stunden eingesetzt werden, zur Langeweile führen können, auch wenn es sich um ein anfänglich so interessantes Versuchsgerät handelt.

6. Literaturverzeichnis

- [1] Die DARDA-Bahn, Helmut Darda GmbH, D-7712 Blumenberg
- [2] Bürger, W.: „Kleine Flitzer - Akrobaten auf der Spielzeugautobahn“, Akademiebericht Nr. 98, Spielzeug-Physik, Dillingen 1986, S. 133 - 138
- [3] Berge, O.E.: „Spielzeug im Physikunterricht“, Quelle und Meyer Verlag, Heidelberg 1982, S.51 - 69
- [4] Cavelius, E.: „Experimente zur Energieerhaltung und Zentrifugalkraft an einer einfachen Fahrbahn“, Praxis der Naturwissenschaften Physik; 10 (1979) S. 258 - 260
- [5] Bronstein Semendjajew, „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch Thun u. Frankfurt/Main, 1989, S. 95
- [6] Vogt L.H.: „Physiological Effects of sustained Acceleration, Life Sciences and Space Research“, Akademie Verlag Berlin 1976, S. 77 - 90
- [7] Peter L.Tea, Jr.: „Trouble on the loop-the-loop“ Am. J. Phys. 55 (1987) S. 826 - 829
- [8] Werner Stengel: Ing.-Büro Nesselwanger Straße 24, 8000 München 71, Konstruktionsunterlagen für eine Achterbahnschleife
- [9] Roman Dengler, „ORVICO - Moderne Methode zum Erfassen, Darstellen und Auswerten von Bewegungsabläufen“, Dissertation, München 1989