Arbeitskreis Bayerischer Physikdidaktiker

Beiitrag aus der Reihe:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 2

Anregungen für Unterricht und Lehre

ISBN 3 - 7896 - 0100 - 4

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1991

Anmerkung:

Matthias Elbel

Die Geometrie in der Physik des 17. Jahrhunderts

1. Einleitung

Natürlich sollte der eigentliche Titel des Beitrags lauten: Geometrie in der Physik bis zum 17. Jahrhundert, aber einerseits würde dadurch unterstellt, die Geometrie sei nach dem 17. Jahrhundert aus der Physik verschwunden, und zum anderen ist bis zum 17. Jahrhundert so wenig in der Physik geschehen, daß man es getrost in der Einleitung zusammenfassen kann. Tatsächlich ist der Zeichenstift für den Physiker immer noch vertrautes Hilfsmittel. Skizzen begleiten seine tägliche Arbeit. Mit ihnen bringt er die Abstraktion auf den Weg, ohne die man nach Galilei (1564-1642) nicht die Gesetze findet, die die Natur beherrschen. Die analytische Methode, die uns seitenweise Formeln produzieren läßt, gehört der nach-newton'schen Ära an. Sie kommt durch Leibniz, Bernoulli, Euler und Lagrange. Newton liebte den synthetischen Beweis der Geometrie. Deswegen ist sein Hauptwerk, die 'principia mathematica philosophiae naturalis' für uns so schwer zu lesen. Man spricht darüber, aber man kennt es nicht. Und doch ist es schade darum, denn geometrische Beweise ermöglichen eine Zusammenschau, einen Überblick, den man Angesichts von Formelwänden nicht haben kann. Manche sind frappierend in ihrer Wirkung und man staunt und fühlt sich amüsiert.

Von Archimedes (287-212) stammt folgendes schönes Beispiel (in seinen beiden Büchern "über die Gleichgewichte oder über die Schwerpunkte von Flächen"): Zwei Flächen, Rechtecke gleicher Höhe, sind jeweils in ihrem Mittelpunkt aufgehängt. Beide befinden sich daher im Gleichgewicht. Vereinigt man sie zu einem größeren Rechteck, ohne sie aneinanderzukleben, so muß man dieses, um es wieder ins Gleichgewicht zu bringen, wiederum in der Mitte aufhängen. Das kann mit Hilfe eines gewichtslosen Stäbchens geschehen (s. Abb. 1). Setzen wir die Länge des Vereinigungsrechtecks gleich l, die des größeren Teilrechtecks gleich x, so ist die des kleineren gleich l-x. Vom Mittelpunkt aus liegt der Unterstützungspunkt des größeren Rechtecks (l-x)/2 entfernt, der des kleineren

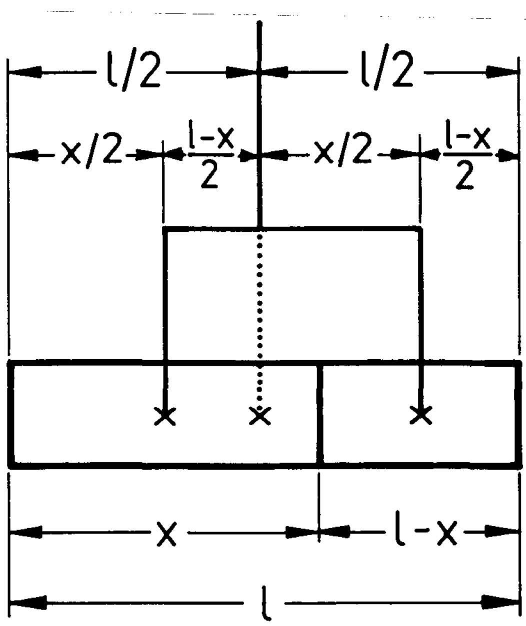

Abb. 1: Zum Hebelgesetz

Rechtecks um $1/2-(1-x)/2$, also $x/2$. Da nun das Gewicht der Rechtecke propotional ihrer Länge sein muß, so findet man, daß das Produkt der Gewichte und der Gewichtsarme

$$x*(1-x)/2=(1-x)*x/2$$

eine Konstante ist. Das Hebelgesetz "Kraft*Kraftarm=Last*Lastarm" steht da. Archimedes hat es durch eine Analyse des Gleichgewichts gewonnen. Das Gleichgewicht soll selbst dann erhalten bleiben, wenn man einen Körper in Teile zertrennt. Die Festigkeit der Körper spielt in seinen Überlegungen keine Rolle, allein maßgebend für ihn ist die ideale, die geometrische Situation. Er abstrahiert aufs äußerste von der Materie und findet gerade dadurch ihre Gesetze. Hier steht er genau auf der Nahtstelle zwischen Platon und Galilei. Er ist zugleich Platoniker, also Idealist, und moderner Physiker. Archimedes hat auch die Gesetze des Auftriebs, d.h. den Gewichtsverlust eingetauchter Körper gefunden und damit die modernen Methoden der Dichtebestimmung ermöglicht. Dabei ist er stets von Gleichgewichten ausgegangen, nur die im Gleichgewicht verharrende Natur, in der alle Dinge ihren angestammten Platz gefunden haben, schien ihm analysierbar zu sein. Die Dynamik schien seiner Physik unzugänglich zu sein. Das blieb so bis ins Mittelalter, bis zu Galilei. Fortschritte gab es nur auf dem Gebiet der Statik. Jordanus von Nemore, ein Scholastiker, hat die Gleichgewichte zwischen Körpern auf verschieden geneigten Ebenen erklärt und damit das Parallelogramm der Kräfte gefunden (13. Jahrhundert). In die Scholastik gehören auch die ersten tastenden Versuche, zu einem Verständnis der Bewegung der Körper zu kommen. In der Schrift "de intensione et remissione formarum" des Nicolas von Oresme, eines Pariser Kanonikers, spüren wir schon am Titel ("Über das Stärker- und Schwächerwerden der Formen") die Einbeziehung der Zeit. Auch die Geschwindigkeit war eine Form im Sinne des Aristoteles, und ihr Stärker- und Schwächerwerden kann sich vollziehen:

simpliciter uniformis
uniformiter difformis
difformiter difformis.

Man ahnt schon die gleichförmige und die gleichmäßig und ungleichmäßig beschleunigte Bewegung. Es bleibt das Verdienst der Scholastik, daß sie das Begriffsgebäude geschaffen hat, in dem die Physiker sich auszudrücken lernten.

Simon Stevin (1548-1620), Ingenieur und Festungsbaumeister, hat gewissermaßen das Fazit dieser Zeit gezogen. In seinem Werk über Statik und Hydrostatik gibt es viele anschauliche, geometrische Beweise. Die Gleichgewichtsverhältnisse zwischen verschieden geneigten Ebenen, deren Erkenntnis ja nötig ist, um Grundmaschinen wie Schraube und Schnecke zu verstehen, konnte er in einem frappierenden Beweis verdeutlichen. Eingeschlossen in das typische Rankenwerk eines Wappens sehen wir ein Dreieck mit horizontaler Basis, um das eine gleichmäßige Perlenkette geschlun-

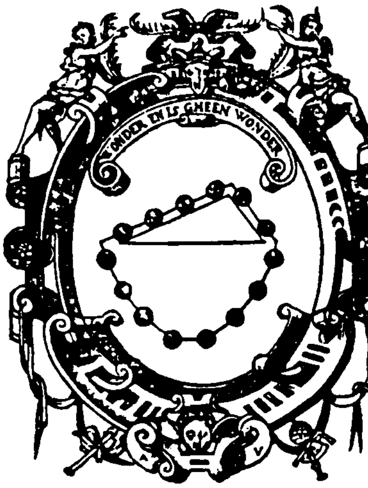

Abb. 2: Zum Gleichgewicht auf der schiefen Ebene

gen ist. Da es sofort einleuchtet, daß die Kette im Gleichgewicht ist, und da ihr unterer, in Form einer Kettenlinie hängender Teil an beiden Enden den gleichen Zug ausüben muß, so folgt, daß sich Massen auf verschieden geneigten Ebenen gleicher Höhe das Gleichgewicht halten, wenn sie den Längen der Ebenen, auf denen sie liegen, proportional sind. Man kann das Frappierende dieses Beweises nicht besser ausdrückem als in dem Spruchband, wo es in erdigem Holländisch heißt: 'Wonder en is gheen wonder'. Übrigens schrieb Simon Stevin alle Bücher in Holländisch und nicht, wie alle Welt, in Latein oder Französisch, weil er der Meinung war, Holländisch sei die Ursprache, die Adam und Eva im Paradies gesprochen hätten. Die übrige Welt glaubte natürlich, das sei Hebräisch gewesen, weshalb man auch versuchte, Taubstumme in Hebräisch zu unterrichten.

Von Stevin stammt auch die Vorrichtung, mit der man noch heute im Unterricht das Parallelogramm der Kräfte demonstriert: Über zwei in gleicher Höhe angebrachte Rollen läuft ein Seil, das an beiden Enden mit beliebigen Massen belastet ist. Zwischen den Rollen hängt eine dritte Masse, die natürlich kleiner sein muß als die beiden vorgenannten Massen zusammen.

Man steht davor und schaut in Ruhe die Addition der Kräfte, ohne sich zu wundern, warum sie sich gerade so addieren. Nun.., weil Kräfte, wie übrigens auch Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, Vektoren sind, und wie die zu addieren sind lehrt die Mathematik. Fehlgegangen! Daß sich Geschwindigkeiten nach diesen Gesetzen addieren, kann man direkt einsehen!

Zeichnet man nämlich entlang einem angeklammerten Lineal eine gerade Linie einmal auf die ruhende, und einmal auf die gleichförmig bewegte Tafel, so entstehen zwei verschieden geneigte Linien. Repräsentiert die erstere die Geschwindigkeit der Kreide im Klassenraum, so stellt die zweite die Summe aus der Geschwindigkeit der Kreide gegen den Klassenraum und des Klassenraums gegen die Tafel dar. Man kann nun in einem Gedankenexperiment beide Bewegungen in eine große Zahl von Teilbewegungen auftrennen, die man alternierend ablaufen lassen kann. Je größer die Zahl, desto näher bewegt sich die Kreide entlang der Diagonale des Parallelogramms der vorgenannten Geschwindigkeiten, womit deren Additionsregel schon bewiesen ist. Addieren sich aber Geschwindigkeiten so, so tun es auch Beschleunigungen, und diese sind Kräften proportional, wie wir seit Newton wissen. Also addieren sich auch Kräfte so. Es hat etwas Atemberaubendes, vor Stevins Apparat zu stehen. Es bewegt sich nichts, und doch addieren sich die Kräfte, wie sich Bewegungen addieren, von denen sie doch gar nichts "wissen". Übrigens läuft Newtons Beweis, den er erst in der zweiten Auflage seiner 'Principia' gibt, in der selben Weise ab wie oben (Zusatz 1 zu seinen drei berühmten Axiomen).

2. Die Theorie der Planetenbewegung von Ptolemäus bis Kepler.

In den verbleibenden Kapiteln konzentrieren wir uns auf eine einzige Entwicklung, die im 17. Jahrhundert ihren Höhepunkt und Abschluß gefunden hat. Ich meine die Planetenbewegung und ihre Zurückführung auf die Gravitation. Ptolemäus, Kopernikus, Galilei, Kepler und Newton sind große, zu nennende Namen.

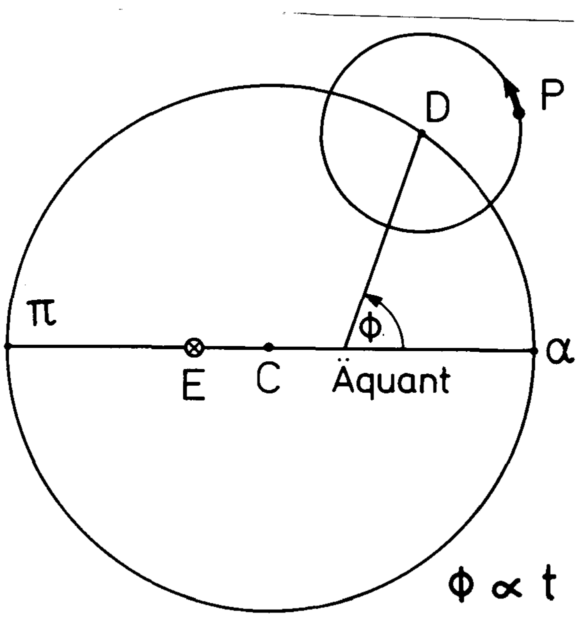

Abb. 3: Zum ptolemeischen Weltbild

Die von uns beobachtete Bewegung der Planeten vor dem Fixsternhimmel zeigt die Erscheinung der zeitweiligen Rückläufigkeit. Im geozentrischen System des Ptolemäus (um 140 n. Chr. in Alexandria, vgl. Abb. 3) wird diese Bewegung durch die Excenterdrehung gedeutet, d.h. der Planet dreht sich gleichförmig um einen Punkt, auf dem Deferenten, der seinerseits mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit den sog. Äquanten umläuft. Der letztere liegt symmetrisch zur Erde auf dem Durchmesser durch den Erdort. Die Bahnkurven sind Kreise, die man sich durchaus als Reifen: 'orbes coelestes', vorstellte. Die Planeten sind immaterielle Lichter.

Die Frage nach einer Himmelsdynamik stellte sich daher gar nicht. Die Radien sind unbestimmt. Man dachte sie sich so groß, daß es nicht zu Kollisionen zwischen den Planeten kommen konnte. Daß der Umlauf der Epizykel der äußeren Planeten Mars, Juppiter und Saturn im Jahresrhythmus erfolgte, fiel niemandem besonders auf. Bei den inneren Planeten war es die Deferentenbewegung, die die Jahresperiode hatte.

Erst dem Frauenburger Domherren Nikolaus Kopernikus war es vorbehalten, ein großes ordnendes Prinzip in dieses Planetarium zu bringen: den Heliozentrismus. Setzt man nämlich die Sonne in den Mittelpunkt, die nun ihrerseits von der Erde wie von allen übrigen Planeten umlaufen wird, so werden die Epizykel überflüssig. Die Bewegung der Planeten vor dem Fixsternhimmel werden durch die parallaktische Täuschung des Beobachters verständlich, der ja nun selbst an der Planetenbewegung teilhat. Die Radien der Bahnen sind nun allerdings nicht mehr willkürlich, sondern als bestimmte Vielfache des Erdbahnradius festgelegt. Seither sind die Bahnradien berechenbar, eben aus der Parallaxe. An den himmlischen Sphären wurde festgehalten.

Es ist merkwürdig, daß sich selbst einem Galilei die Frage nach der Himmelsdynamik gar nicht zu stellen schien, die Frage nämlich: Was zwingt die Planeten auf Kreisbahnen, wo doch die kräftefreien Bewegungen als geradlinig erkannt waren. Wahrscheinlich war es die Fiktion der himmlischen Reifen, die das Problem verschleierten. Die Drehbewegung eines Reifens dauert ja auch im kräftefreien Fall ungebremst an.

Anders bei Kepler (1571-1630)! Für ihn waren die Planeten materielle Körper wie die Erde. Also waren sie träge, also war im Sinne der aristotelischen Mechanik eine Kraft nötig, um sie zu bewegen. Kepler dachte an eine von der Sonne ausgehende zentrale Kraft, die sich ähnlich wie Lichtstrahlen im Raum verbreiten sollte. Dies sollte aber nicht nach einem $1/r^2$-Gesetz erfolgen. Die Kraft brauchte ja nur flächig, in der Bahnebene der Himmelskörper zu wirken. Also nahm er eine $1/r$-Abhängigkeit an. Ein Fehler, den er sogleich mit einem zweiten kompensierte! Er setzte die Kraft nämlich, darin noch ganz Aristoteliker, der Geschwindigkeit proportional. Heraus kommt der Flächensatz: Der Fahrstrahl Sonne - Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen!

An diesen Satz hat er unverbrüchlich geglaubt. Als Leitstern hat er ihn von Erfolg zu Erfolg geführt. Wie kam Kepler zu seinem berühmten Fund, daß die Planeten auf Ellipsenbahnen und nicht auf Kreisbahnen laufen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht? Will man eine Hypothese überwinden, muß man ihr zunächst alle Chancen geben, sich zu bewähren. Kepler hielt an der Kreisbahn fest. Er tat das aufs äußerste und fand gerade darum die Lösung. Nach der alten Äquantenhypothese ließ er nämlich die Sonne im Kreis einen exzentrischen Standort einnehmen. Nur am Fächensatz für den Fahrstrahl Sonne-Planet hielt er fest. Wie erfolgt dann die Bewegung?

Betrachten wir das differentiell kleine Drei-

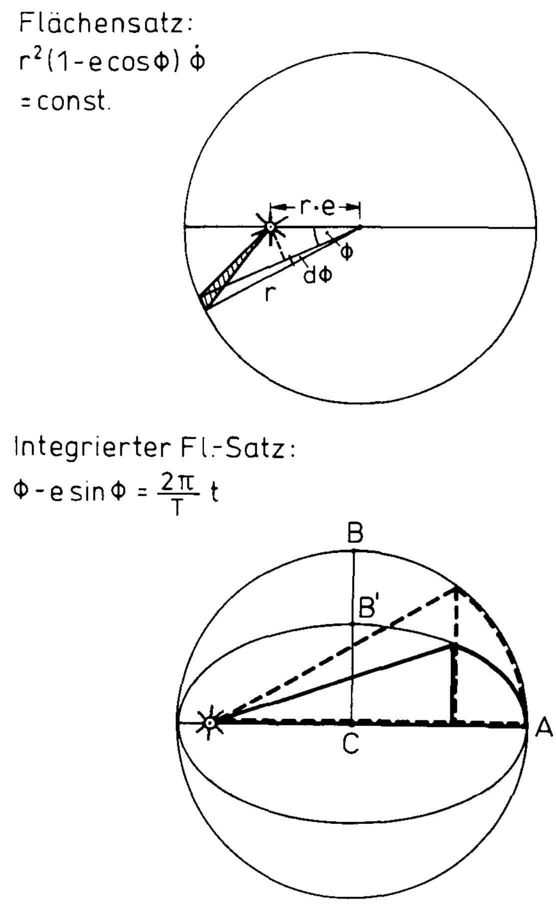

Abb. 4: Keplerschen Gleichung zur Ellipsenbahn

eck im oberen Teil der Abb. 4. Es repräsentiert die im Zeitintervall Δt überstrichene Fläche. Wir finden seine Größe als:

$$r^2 * (1 - e * \cos\Phi) * \dot{\Phi} \quad ,$$

wenn auf das Zeitelement bezogen. Die Gleichung erweist sich als Differentialgleichung für die Zeitabhängigkeit von Φ. Kepler hat sie mühsam numerisch integriert. Wir tun das in einem Zug und haben gleich die Kepler'sche Gleichung da stehen: Φ in Abhängigkeit von der Zeit t bei einer durch den Flächensatz bestimmten Kreisbewegung! Im Vergleich mit den Messungen ergab sich aber eine charakteristische Abweichung. Es schien so, als ob der Planet Mars beim Aufsteigen aus einer der Apsiden hinter dem errechneten Ort zurückbliebe, bis er ihn in der Quadratur einholte, worauf er bis zum Erreichen der nächsten Apside sogar vorraneilte. Der ganze Effekt betrug 7', dreimal mehr als der Meßfehler, der bei 2' lag. Kepler sah, daß die Bewegung richtig widergegeben wurde, wenn er annahm, daß die Bahnkurve kein Kreis, sondern eine Ellipse war, die ganz im Innern des Kreises verlief, an den sie in den Apsiden angrenzte. Dabei sollte der wahre Ort des Planeten stets vertikal unter dem errechneten Ort auf der Kreisbahn zu liegen kommen. Kepler bemerkte sofort, daß auch dann noch die Bewegung nach dem Flächensatz erfolgte, denn bei der Ellipse sind alle in Frage kommenden Flächen gegenüber den entsprechenden Flächen beim Kreis im Achsenverhältnis verkürzt, aber somit auch strikt proportional.

Kepler konnte mit der Ellipsenhypothese die Planetenbewegung mit äußerster Genauigkeit beschreiben. Zudem kam auch noch die Sonne in den Brennpunkt der Ellipse zu liegen, was nicht gefordert war, aber seinen Fund immer wahrscheinlicher werden ließ. Kepler hat diese Ergebnisse in seiner "Astronomia nova" (1609) veröffentlicht.

Sein dritter Satz: die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen, findet sich erst in seinem 'Harmonice mundi' von 1619. All das ist sicher der unerhörteste Erfolg der vor-newtonischen Ära, vergleichbar nur mit den großen Durchbrüchen unseres Jahrhunderts. Die Keplerschen Gesetze lassen an Präzision der Vorhersage nichts zu wünschen übrig. Bewiesen waren sie nicht, aber in jeder Hinsicht wahr! Und sie zeigten, daß die Vorgänge am Himmel durch Kräfte zwischen den Gestirnen zustande kommen. Diese Einsicht war wegweisend. Die Vorbereitungen für das Wirken Newtons waren getroffen!

3. Newton's Gravitationsgesetz und die Planetenbewegung.

1666 war das große Jahr, in dem Newton seine drei großen Entdeckungen machte: Differentialrechnung, Dispersion des Lichts und Gravitation. Die Anziehung der Körper aufeinander erfolgt danach umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes und nicht des Abstandes selbst, wie von Kepler geglaubt. Durch Vergleich der Gravitationsfeldstärke an der Erdoberfläche und an der Mondbahn ließ sich das Gesetz überprüfen. Dabei war der Mondabstand zu sechzig Erdradien durch Triangulation von zwei Erdörtern aus befriedigend bestimmt worden. Daß der Erdradius nicht genau bekannt war, war unerheblich. Als dann in den siebziger Jahren die Huyghens'sche Zentripetalkraft bekannt wurde, ist es mehreren Astronomen geglückt, das dritte Keplergesetz aus dem Newton'schen Gravitationsgesetz herzuleiten. Zu nennen sind hier Halley, der Entdecker des ersten langperiodischen Kometen, Hooke und Wren, der Erbauer der Kuppel der St. Paul's Kathedrale. Die Herleitung der übrigen Keplergesetze ist ihnen nicht gelungen. 1684 besuchte Halley seinen Lehrer Newton, der in Cambridge den "Lucasian chair" innehatte, auf den Isaac Barrows, selber berühmter Mathematiker, voll Bewunderung für seinen genialen Schüler Verzicht geleistet hatte. Halley fragte Newton, auf welchen Bahnkurven Planeten liefen, wenn das Newton'sche Gravitationsgesetz gelte. Newton sagte: eine Ellipse, und Halley fragte, woher er das wisse. Newton darauf: Why, I have calculated it!

Es war das heißeste Problem damals. Newton hatte es gelöst und in der Schublade abgelegt. Nur mit Mühe ist es Halley gelungen, Newton zur Herausgabe seiner in der Schublade abgelegten Ergebnisse zu veranlassen. So hat Newton die "Principia mathematica" geschrieben und Halley hat ihre Edition besorgt. Sie sind 1687, vor nunmehr 304 Jahren erschienen und tragen das "Imprimatur" der Royal Society, vertreten durch ihren Präsidenten Samuel Pepys, aus dessen Tagebüchern wir von all diesen Vorgängen wissen.

Wie führt Newton seine Beweise? In einer für seine Methode sehr typischen Art (Hinweis: Skizzen und geometrische Überlegungen zum Beweis sind in Abb. 5a bis 5e zusammengestellt). Er betrachtet zunächst andere, im Versuch leicht herzustellende Ellipsenbewegungen, z.B. die eines Kegelpendels (s. Abb. 5a). Hier ist bei geeignetem Anstoß immer eine Ellipsenbewegung möglich. Welches Abstandsgesetz muß die Zentralkraft befolgen, die diese Bewegung zustande bringt? Newton denkt sie sich in einem Punkt der Bahn ausgeschaltet. Der Pendelkörper würde unter Beibehaltung seiner Momentangeschwindigkeit tangential weiterfliegen. Das Stück zur Kurve zurück in zentraler Richtung ist sicher das Stück, das der Körper unter der Wirkung der Kraft durchfallen hätte, wäre sie eingeschaltet gewesen. Teilen wir es durch das Quadrat der Zeit, so erhalten wir nach den Fallgesetzen die Beschleunigung, welche der Kraft proportional ist.

Wie geometrisiert Newton die Zeit? Nach dem Flächensatz ist das Flächenstück, welches der Fahrstrahl vom Zentrum zum Körper überstrichen hat, ein Maß für die Zeit, in der Abbildung 5a ist es das Dreieck mit der Basis a' und der Höhe v!

Wir wählen nun zweckmäßig eine Darstellung in schiefwinkligen Koordinaten, wobei x'- und y'-Achsen zueinander konjugiert sind. In diesem Koordinatensystem schreibt sich die Ellipsengleichung wie im rechtwinkligen, nur sind die konjugierten Halb-

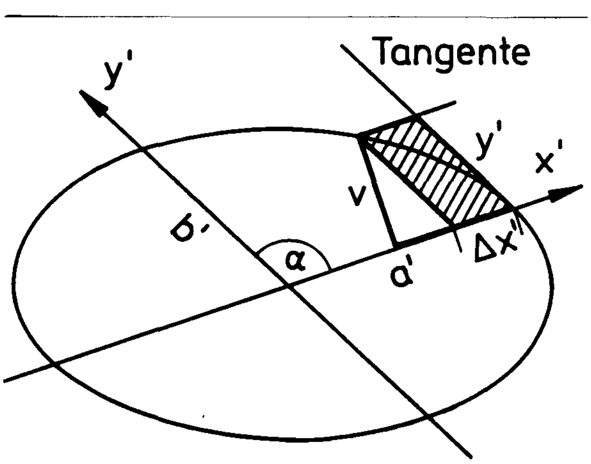

Abb. 5: Erläuterungen zum Beweis Newtons

Abb. 5a: Zum Kraftgesetz beim elliptischen Pendel

$(x'/a')^2 + (y'/b')^2 = 1$

$((a' - \Delta x')/a')^2 + (y'/b')^2 = 1$

$\Delta x' * (2a' - \Delta x') = (a' * y'/b')^2$

Vergleich Höhensatz (Thaleskreis)

$F \propto \Delta x'/\Delta t^2 \propto \Delta x'/(v\, a')^2 = \Delta x'/(y' a' \sin\alpha)^2$

$\approx ((a'/b') * y')^2 / (2a'(y'\, a'\, \sin\alpha)^2) \approx a'/\text{konst};$

$(\text{konst.} = 2(a' b' \sin\alpha)^2)$

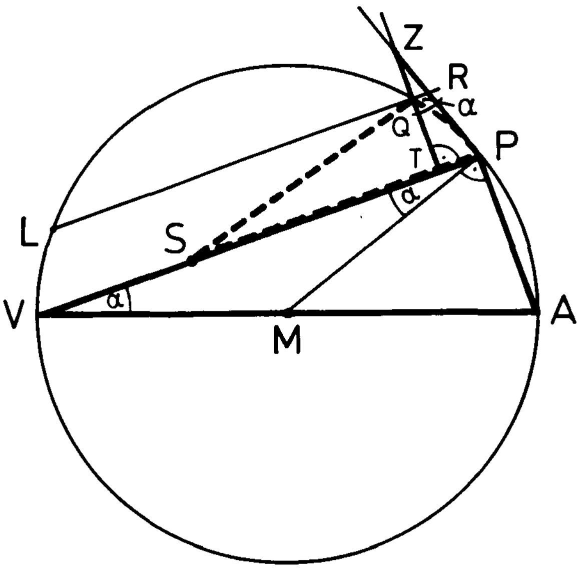

Abb. 5b: Ellipsenbahn und Gravitationsgesetz (1. Teil)

Kraft $F \propto RQ/\Delta t^2 \propto RQ/(SP * QT)^2$,

weil nach dem Flächensatz gilt:

$\Delta t \propto SP * QT$

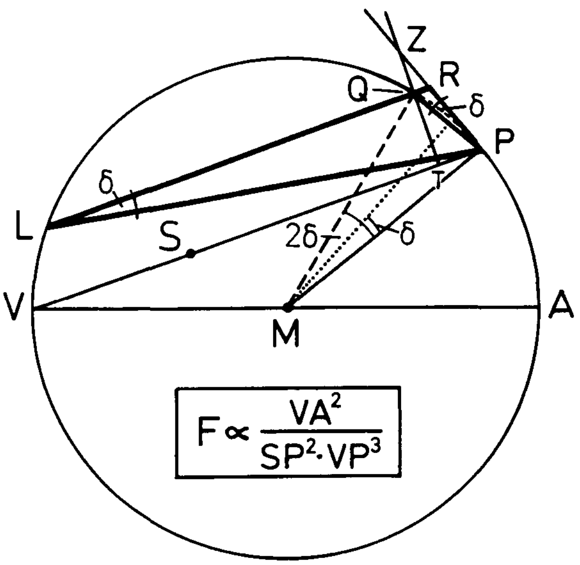

Abb. 5c: Ellipsenbahn und Gravitationsgesetz (2. Teil)

Dreiecke PRQ und LRP sind ähnlich,
darum: $LR/RP = RP/QR$
oder: $LR * QR = RP * RP$
(Sehnen–Tangenten–Satz)
folglich:

$F \propto QR/(SP * QT)^2$

$= (RP)^2/((SP)^2 * (QT)^2 * LR)$

$RP/QT = VA/VP$

$VP = \lim_{\Delta t \to 0} LR$

achsen a',b' zu verwenden. Der Rest des Beweises ist einfach. Unter Berücksichtigung dessen, daß $4a'b'\cos\alpha$ die Ellipsenfläche, also eine Konstante der Bewegung ist, folgt, daß die Kraft proportional a', also dem Abstand zum Zentrum ist.

Viel schwieriger gestaltet sich der Beweis für den Keplerfall, bei dem das Kraftzentrum nicht im Mittelpunkt, sondern in einem Brennpunkt der Ellipse liegt. Wie gestaltet sich dann das Abstandsgesetz der Kraft? Newton geht zurück zur Kreisbahn, die ja für infinitesimal kurze Zeitabschnitte bei beliebigen Bahnkurven vorliegt. Er fragt nun, wie sich Kräfte verhalten müssen, die von verschiedenen Zentren ausgehen und doch die gleiche, momentane Kreisbewegung bewirken. Dann ist das Abstandsgesetz der Kraft für jedes beliebige Zentrum in der Ellipsenbahn aus dem Abstandsgesetz für das Ellipsenpendel herleitbar.

In Abbildung 5b laufe der Körper in der Zeit Δt von P nach Q, unter Ausschaltung der Kraft von P nach R. Er durchfällt dann unter Einwirkung der Kraft das Stück RQ. SP∗QT ist wieder als Fläche, die in Δt überstrichen wird, ein Maß für die Zeit. Also ist

$$F \propto RQ/(SP * QT)$$

ein Maß für die Kraft. Hierin sind RQ und QT arbiträr und durch Konstante zu ersetzen. Für RQ findet man leicht, daß es nach dem Sehnen-Tangenten-Satz durch RP und LR auszudrücken ist (s. Abb. 5c). Endlich folgt:

$$QT/RP = VP/VA \quad ,$$

weil die Dreiecke VAP und ZTP ähnlich sind. So erhalten wir:

$$F \propto (\text{Kreisdurchmesser})^2/\left((\text{Abstand: Zentrum–Körper})^2 * (\text{Sehne: Zentrum-Körper})^3\right).$$

Wir wären fertig, wäre die Sehne Zentrum-Körper eine Konstante. Sie ist es nicht und darum setzt Newton seinen Beweis fort. Er fragt, wie sich zwei Kräfte verhalten müssen, die von verschiedenen Zentren R und S ausgehen und dennoch die gleiche Kreisbewegung verursachen. Sie verhalten sich nach dem Vorstehenden umgekehrt wie die Abstandsquadrate mal den dritten Potenzen der Sehnen Zentrum-Körper.

Newton eliminiert die letzteren, indem er in P eine Tangente errichtet und durch S eine Parallele zu RP zieht (s. Abb. 5d). Er erhält so ein neues ähnliches Dreieck, welches die Proportion PT/PV = PS/SG ermöglicht. Damit sind die Sehnen heraus und unversehens halten wir ein umfassendes Theorem in Händen:

$$F(S)/F(R) = (PR)^2 * PS/(SG)^3$$

Hier kommen Kenngrößen des Kreises nicht mehr vor. Der Satz gilt darum für jede beliebige Bahnkurve, die in P einen Schmiegkreis besitzt.

Also gilt sie auch für die Ellipse! Für den Mittelpunkt als Zentrum kennen wir schon das Kraftgesetz: "Kraft proportional Abstand". Also können wir es für jedes beliebige andere Zentrum daraus herleiten, z.B. für Keplers Brennpunkt.

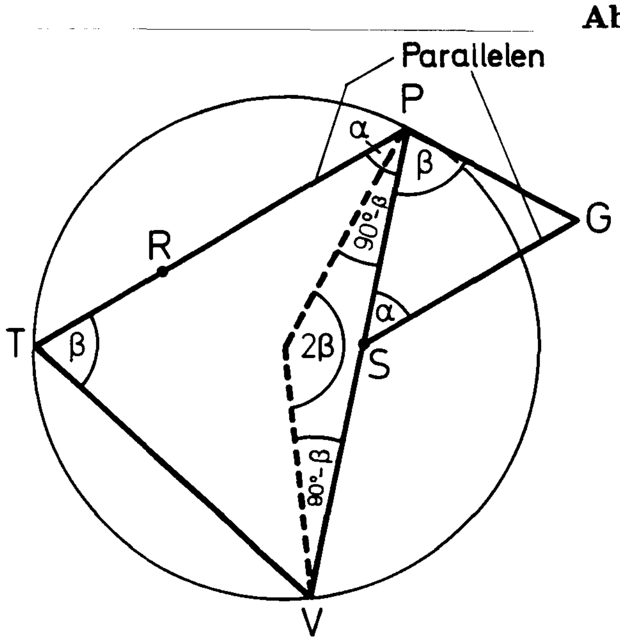

Abb. 5d: Ellipsenbahn und Gravitationsgesetz (3. Teil)

$$F(S)/F(R) = (PR/PS)^2 * (PT/PV)^3$$
$$= (PR/PS)^2 * (PS/SG)^3$$
$$= (PR)^2 * PS/(SG)^3$$

wegen der Ähnlichkeit folgt:

$$PT/PV = PS/SG$$

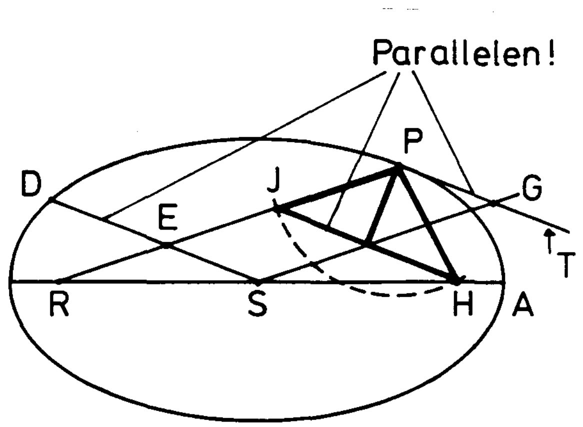

Abb. 5e: Ellipsenbahn und Gravitationsgesetz (4. Teil); T: Tangente

Für Ellipsenbewegung gilt:

$$F(S) \propto PS$$

(Harmon. Oszillator in zwei Dimensionen)

Also: $F(R) \propto (SG)^3/(RG)^2$;
nach Abb. 5e gilt: $SG = EP$; ferner gilt:
$EP = EJ + JP = 0.5*(RJ + JP + PH) = AS$;

also: $\mathbf{F(R) = Const./(RP)^2}$

(Gravitationsgesetz)

Eine letzte Abbildung (s. Abb. 5e): die Bahnellipse! Wir verbinden einen beliebigen Punkt P der Bahn mit dem Brennpunkt, von dem die Kraft ausgehen soll, errichten die Tangente in P und zeichnen durch den Mittelpunkt die Parallele zu RP. Sie schneidet von der Tangente das Stück PG ab. Nach dem Vorherigen ist:

$$F(S)/F(R) = (RP)^2 * PS/(SG)^3$$

F(S) ist aber schon als proportional PS bekannt. Verbleibt:

$$F(R) \sim (SG)^3/(RP)^2.$$

Wir müssen nun nur noch die Konstanz von SG zeigen und haben das Gravitationsgesetz da stehen. Es ist aber mit wenigen Schritten zu zeigen, daß $SG = SA$, also gleich der großen Halbachse ist. Man sieht es leicht, wenn man an die Konstruktionsvorschrift der Ellipse denkt: $RP + PH = 2*SA$. Wichtig in diesem Zusammenhang: Die Normale auf die Kurve in P ist zugleich Winkelhalbierende des Dreiecks RPH bei P!

Wir stellen fest: Bis auf die Ellipsensätze war alles elementar, dem Stoff der Jahrgangsstufe 8 und 9 zuzuordnen, jedenfalls soweit sich der Schreiber erinnert.
Wären die Physiker Newton gefolgt, sie wären noch lange bei Zirkel und Lineal geblieben. Newton ist in seiner Wissenschaft eigentlich der große Unzeitgemäße, vergleichbar J. S. Bach. Er führt die vorgefundene Wissenschaft zu einer ungeahnten Vollendung, während ihn die Neuerer bereits rechts und links überholen. Was er aber mit seinen altertümlichen Methoden erreicht hat, ist ungeheuer. Er hat nicht nur die Optik, und hier besonders die Dispersion begründet, sondern auch das Gravitationsgesetz entdeckt, er hat die Hydrodynamik konzipiert und sogar die Bewegungen der Mondbahnknoten durch Störungsverfahren berechnet. Mit diesem Rückblick und dieser Würdigung seiner "Principia" beenden wir die Ausführungen zur Geometrie in der Physik in der Hoffnung, einige Anregungen zum Weiterstudium gegeben zu haben.

4. Literatur:

[1] I. Newton,"Mathematische Principien der Naturlehre",
Verlag von Robert Oppenheim, Berlin 1872.

[2] M. Fierz,"Vorlesungen zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik",
Springer, Lecture Notes in Physics, Berlin 1972.

[3] F. Krafft, "Das Selbstverständnis der Physik im Wandel der Zeit",
Physikverlag, Weinheim 1982