

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 4

ISBN 3 - 7896 - 0588 - 9

Verlag Palm & Enke, Erlangen und Jena 1998

Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle
genutzt werden. Auf der Homepage

www.solstice.de

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

R. Girwidz

Wellenlehre auf dem Computer

1 Vorbemerkung

Die numerische Behandlung von Wellen mit dem Computer ist aus zwei Gründen wichtig für die Elementarisierung der Wellenlehre:

Erstens können durch Computerprogramme eine Vielzahl von interessanten Wellenphänomenen „live“, d.h. nicht in Momentaufnahmen, sondern im zeitlichen Ablauf, präsentiert und einer genauen Beobachtung zugänglich gemacht werden.

Zweitens läßt sich die in den Programmen verwendete numerische Methode, das sogenannte finite Differenzenverfahren, aus grundlegenden physikalischen Gesetzen in einsichtiger Weise herleiten, wobei die mathematischen Anforderungen nur Grundkenntnisse aus der Differentialrechnung voraussetzen.

Diese Methode zeigt auch, daß die Entstehung von Wellen und die bei der Wellenausbreitung beobachtbaren Phänomene lediglich Konsequenzen von beobachtbaren Grundgesetzen der Physik sind. Im Folgenden wird dies an einigen Beispielen näher erläutert.

2 Elementarer Ansatz aus der Dynamik

2.1 Behandlung von Wellen in der Schulphysik

In Schule und Grundstudium dominiert eine phänomenologische Betrachtung von Wellen. Sie ist vorrangig kinematisch bzw. deskriptiv ausgerichtet und auf die Beschreibung von Wellenphänomenen beschränkt. Betrachtungen zur Dynamik werden, wenn überhaupt, nur ansatzweise vorgestellt, aber nicht weiter verfolgt. Der mathematische Aufwand bleibt somit begrenzt. Allerdings werden dadurch auch unterschiedliche für Wellen charakteristische Erscheinungen getrennt gelernt. Beispielsweise lernen Schüler in der Regel das ungestörte Durchdringen zweier Kreiswellen und das Ausblenden Huygensscher Elementarwellen als zwei unterschiedliche Vorgänge kennen. Das fachliche Hintergrundwissen, durch das beide Erscheinungen ursächlich erklärt werden könnten, bleibt verborgen. Abhilfe kann hier die numerische Behandlung von Wellen schaffen. Einer der ersten Vorschläge, der die numerische Behandlung von Wellen durch schrittweise Integration mit einem programmierbaren Taschenrechner zum Inhalt hat, stammt von H. Dittmann (1979).

2.2 Numerisches Verfahren

Für Demonstrationsversuche werden häufig Feder-, Pendelketten oder Wellenmaschinen eingesetzt. Hieran läßt sich direkt anknüpfen. Versuchsanordnungen wie Pendelkette oder Wellenmaschine haben bereits mit dem hier favorisierten numerischen Verfahren - der finiten Differenzenmethode - gemeinsam, daß kein

Kontinuum, sondern diskrete Massenverteilungen betrachtet werden (physikalisch eine lineare Kette oder eine Gitterstruktur). Für die einzelnen Kettenglieder bzw. Massen kann das zweite Newtonsche Axiom angesetzt werden. Dabei wird ein lineares Kraftgesetz angenommen, bei dem die Auslenkungsunterschiede benachbarter Massen direkt eingehen. (Ein lineares Kraftgesetz ist Schülern z.B. bereits vom Hooke'schen Gesetz her bekannt.) Bereits mit diesen, aus physikalischer Sicht elementaren Annahmen läßt sich die Methode der finiten Differenzen für Wellen herleiten und plausibel machen (Für eine etwas ausführlichere Darstellung sei hingewiesen auf Girwizd (1996)). An der linearen (Feder-)Kette ist dies besonders einsichtig (siehe Abb. 1).

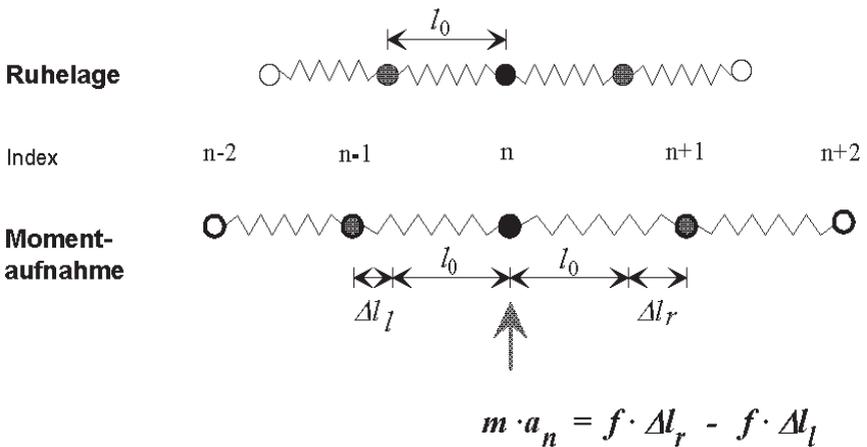


Abb. 1: Skizze zur linearen Federkette.

a_n : Beschleunigung des Teilchens n mit der Masse m; f : Federhärte;
 Δl_r und Δl_l : Dehnung der jeweiligen Federabschnitte.

Δl_r und Δl_l berechnen sich aus den momentanen Teilchenpositionen, die in der nächsten Gleichung mit $l_i(t)$ bezeichnet sind. Mit $F=ma$ gilt dann:

$$m \cdot a_n = f [l_{n+1}(t) - l_n(t) - l_0] - f [l_n(t) - l_{n-1}(t) - l_0]$$

$$m \cdot a_n = f [l_{n+1}(t) - 2l_n(t) + l_{n-1}(t)]$$

Ein solcher Ansatz wird Schülern eher einsichtig, wenn man an das Hooke'sche Gesetz anknüpft. Allerdings werden in den später verwendeten Computerprogrammen MEDIUM1D und MEDIUM2D nicht Longitudinal- sondern Transversalwellen behandelt. Wird dabei vorausgesetzt, daß die Auslenkungsunterschiede Δw_i von Gitterpunkt zu Gitterpunkt klein bleiben in Relation zum Gitterabstand, dann sind auch hier die Rückstellkräfte den Auslenkungsunterschieden

näherungsweise proportional. Somit ist die Behandlung von Longitudinal- und Transversalwellen formal identisch. Nachfolgend wird nur noch mit den Auslenkungen w_i aus der Ruhelage gerechnet.

Die näherungsweise Beschreibung der Beschleunigung a_n über Differenzenquotienten sollte keine Schwierigkeiten bereiten, da sie an den Beschleunigungsbegriff, wie er in der Sekundarstufe II eingeführt wird, anknüpft. Dies ergibt:

$$m \cdot \frac{[w_n(t + \Delta t) - 2w_n(t) + w_n(t - \Delta t)]}{\Delta t^2} = f \cdot [w_{n+1}(t) - 2w_n(t) + w_{n-1}(t)].$$

Aufgelöst:

$$w_{n\text{neu}} = 2 \cdot w_n - w_{n\text{alt}} + \frac{f^*}{m} [w_{n+1} - 2 \cdot w_n + w_{n-1}].$$

Damit sind die Auslenkungen $w_{n\text{neu}}$ zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ aus den Werten zu den Zeiten t und $t - \Delta t$, d.h. w und w_{alt} berechenbar. Diese Formel läßt sich direkt für die Programmierung verwenden.

2.3 Lösungsansatz aus übergeordneter Sicht

Aus mathematischer Sicht handelt es sich lediglich um die numerische Lösung der Wellengleichung mittels eines einfachen Differenzenverfahrens (Siehe z.B. Finck von Finckenstein (1978) oder Marsal D. (1989)); aus übergeordneter physikalischer Sicht wird eine lineare Kette bzw. eine Gitterstruktur simuliert.

Das Grundprinzip ist einfach: In der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$$

ersetzt man die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten. Dabei ist w die Auslenkung am Ort x zur Zeit t und u die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Aufgelöst ist die resultierende Differenzgleichung direkt für die numerische Berechnung geeignet. Die Funktion $w(x, t)$ wird dadurch quasi an diskreten Stellen (Gitterpunkten) approximiert. Allerdings ergibt sich durch den Gitterabstand eine kleinste Wellenlänge, die auf dem System überhaupt realisierbar ist und die Dispersion ist insbesondere für kleine Wellenlängen nicht vernachlässigbar. Bei den Spezifikationen im Programm MEDIUM2D wird dies z.B. gut erkennbar für Wellenlängen, die kleiner als zehn Gitterabstände sind - siehe Kapitel 3.3. Das Verfahren ist leicht auf mehrdimensionale Probleme übertragbar, z.B. auf die zweidimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = u^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

Im einfachsten Fall verwendet man als Diskretisierung der Ebene ein quadratisches Gitter der Maschenweite a und berücksichtigt nur die vier nächsten Nachbarn eines betrachteten Punktes. Die zweite partielle Ableitung einer Funktion $w(x,y,t)$ nach x am Ort (x_0, y_0) ist dabei zu ersetzen durch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x_0, y_0, t)}{\partial x^2} &\approx \frac{[w(x_0 + \Delta x, y_0, t) - w(x_0, y_0, t)] - [w(x_0, y_0, t) - w(x_0 - \Delta x, y_0, t)]}{\Delta x^2} \\ &\approx \frac{1}{\Delta x^2} [w(x_0 + \Delta x, y_0, t) - 2w(x_0, y_0, t) + w(x_0 - \Delta x, y_0, t)] \end{aligned}$$

Analoges gilt für die partiellen Ableitungen nach y . Die Zeitableitungen werden ebenfalls durch einen Differenzenoperator ersetzt, wobei die Werte dann natürlich aus verschiedenen „Zeitebenen“ stammen müssen.

2.4 Den Ansatz mit dem Computer testen

In der Wellenlehre lassen sich Berechnungen mit dem Computer so aufbereiten, daß ein direkter visueller Vergleich mit experimentellen Abläufen möglich wird. Dies macht Stärken oder Fehler des jeweiligen Ansatzes schnell deutlich. Das Programm MEDIUM1D bietet neben vorbereiteten Berechnungsfunktionen zusätzlich die Möglichkeit, eigene Anweisungen einzugeben (siehe Abb. 2).

In Abb. 2 ist im Eingabefeld ein Ansatz vorgeschlagen, der den Ergebnissen aus Kapitel 2.2. entspricht und bei dem für jeden Gitterpunkt die Rückstellkräfte linear mit den Auslenkungsunterschieden zu den Nachbarpunkten eingehen. Die Bezeichnungen wurden etwas vereinfacht: Δr entspricht der Auslenkungsdifferenz einer betrachteten Gitterstelle zum rechten Nachbarn, Δl der Auslenkungsdifferenz auf der linken Seite.

An der Wellenmaschine, die das Computerbild zeigt, lassen sich dann die gängigen Demonstrationsexperimente simulieren und mit realen Abläufen vergleichen. Geänderte Eingaben simulieren mitunter völlig andersartige Systeme. Beispielsweise kann auch ein Ausdruck eingegeben werden, der der Wärmeleitungsgleichung entspricht.

2.5 Wellen mit dem Computer simulieren

Das Programm MEDIUM1D simuliert am Computer eine eindimensionale Wellenmaschine bzw. eine lineare Kette. Mit der Maus lassen sich Auslenkungen erzeugen. Der Mauszeiger muß nur auf und ab bewegt werden, um an der gezeigten Position eine Störung anzuregen. Wellen können in Echtzeit, aber auch im Einzelschrittmodus studiert werden. Wie bei der bekannten Torsionswellenmaschine sind festes und offenes Ende einstellbar. Die Enden lassen sich aber auch mit dem Wellenwiderstand abschließen, um so eine unendliche Fortsetzung des Mediums zu simulieren. Außerdem ist die Aufteilung der Kette in zwei Medien mit unterschiedlichen Materialeigenschaften möglich.

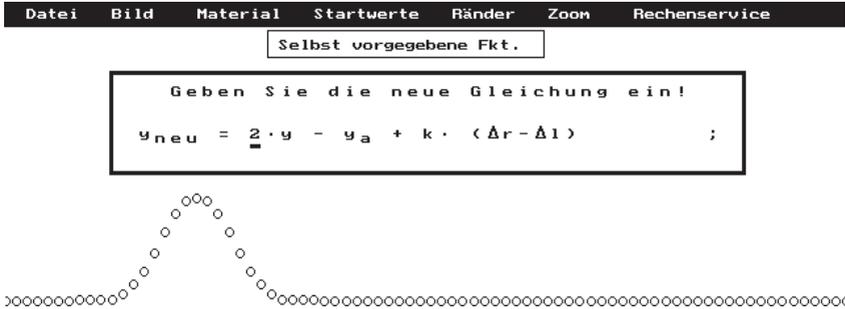


Abb. 2: Bildschirmkopie aus dem Programm MEDIUM1D.

Das Programm ist aber nicht nur zum Testen numerischer Ansätze gedacht, sondern bietet auch die Möglichkeit, fast spielerisch Eigenerfahrungen mit Wellen zu sammeln und dies mit einem geringen Zeit- und Materialaufwand.

Für zweidimensionale Medien löst das Programm MEDIUM2D numerisch die Wellengleichung und die Wärmeleitungsgleichung. Unterschiedliche Ausgangssituationen und Ränder sind einstellbar. Die Ergebnisse werden in 3D-Darstellung ausgegeben und können als Film auf dem Computer ablaufen. Die Intention ist, die berechneten Prozesse in ihrer Zeitabhängigkeit verlaufsnah und anschaulich zu präsentieren. Ein weiteres Ziel ist aufzuzeigen, wie mit einfachen numerischen Methoden die Beschreibung relativ komplexer Sachverhalte erreicht werden kann. Im nächsten Kapitel werden noch konkrete Anwendungen des Programms vorgestellt, um die verschiedenen Möglichkeiten deutlich zu machen.

3 Weitere Computerhilfen

3.1 Grundlegende Begriffe

Die physikalische Behandlung und Diskussion von Wellenphänomenen verlangt Vertrautheit mit einigen grundlegenden Bezeichnungen. Dazu gehören z.B. die Begriffe Wellenlänge, Phase, Phasengeschwindigkeit, Periode, Amplitude oder Charakterisierungen wie harmonisch, anharmonisch, gedämpft oder ungedämpft. Eine Visualisierung dieser Begriffe in Einzelbildern ist durch die Orts- und Zeitabhängigkeit von Wellenerscheinungen erschwert. Sie lassen sich aber oft eindrucksvoll in dynamischen Computersimulationen veranschaulichen. Solche Programme wurden insbesondere von Prof. Scheer in seinen Einführungsvorlesungen verwendet (Vorlesung Einführung in die Experimentalphysik I an der Universität Würzburg (bis 1993)). Sie verfolgen das Single-Concept-Prinzip, d.h. ein einzelner Sachverhalt, ein Konzept wird besonders akzentuiert dargestellt. Mit derartigen Programmen lassen sich natürlich nicht nur Definitionen sondern auch elementare Phänomene und Prinzipien veranschaulichen.

3.2 Elementare Phänomene und Prinzipien

Aufbauend auf einem grundlegenden Verständnis für das Zustandekommen von Wellen wären in einer nächsten Stufe elementare Prinzipien und Grundphänomene der Wellenausbreitung hervorzuheben. Entsprechende Inhalte sind die ungestörte Superponierbarkeit von Wellen, das Huygenssche Prinzip, Energietransfer ohne Materialtransport, Interferenzeffekte, Reflexionen an offenen und festen Enden, Brechung und Streuung. Lernpsychologisch gesehen spielen sie für ein weitergehendes Verständnis oder bei Problemanalysen die Rolle von Denkmodulen, Strukturierungs- und Analysehilfen. Zwei Beispiele sollen andeuten, wie Computerprogramme als Erklärungs- und Visualisierungshilfen zum Tragen kommen können (siehe Abb. 3 und Abb. 4).

Methodisch gesehen verwenden diese Programme Techniken zum Isolieren, Akzentuieren und analytischen Aufbereiten von Lerninhalten.

Unbedingt hervorzuheben ist aber, daß sich all diese Prinzipien und Phänomene auch mit dem einfachen Ansatz aus Kapitel 2 erklären lassen (Aktionsprinzip und Annahme eines Kraftgesetzes, in das die Auslenkungsunterschiede zwischen benachbarten Punkten linear eingehen). Der Ansatz liefert ja direkt das numerische Verfahren zur Simulation von Wellen. Die verschiedenen Starteinstellungen der Programme MEDIUM1D oder MEDIUM2D führen also prinzipiell nur

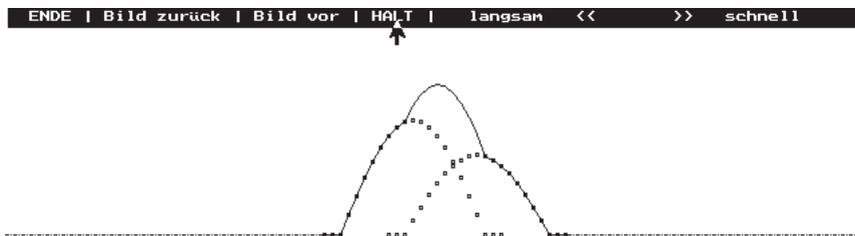


Abb. 3: Bildschirmkopie (Momentaufnahme) aus dem Programm zur Verdeutlichung des Prinzips der ungestörten Superposition. Die Störungen laufen gegeneinander, überlagern sich und laufen wieder auseinander.

auf Konsequenzen, die aus diesem Ansatz resultieren. Nachfolgend sind einige Ausschnitte aus Computerfilmen des Programms MEDIUM2D abgebildet. Sie sind nicht nur dazu geeignet, anhand von Grundphänomenen elementare Prinzipien zu veranschaulichen. Sie ermöglichen auch den direkten Vergleich mit experimentellen Abläufen und können dabei die Tragweite des zugrundeliegenden - elementaren - Ansatzes aufzeigen (siehe Abb. 5 bis Abb. 8).

Weiter Beispiele sind in einem Programmpaket zusammengefaßt. Behandelt werden insbesondere noch die Begriffe Wellenlänge, Phasengeschwindigkeit, Reflexion, Brechung und Huygenssche Elementarwellen.

3.3 Grenzen des Verfahrens

Zum Verständnis elementarer physikalischer Prinzipien und Ansätze gehört auch die Kenntnis ihres Anwendungsspektrums. Somit ist nicht zu vergessen, grund-

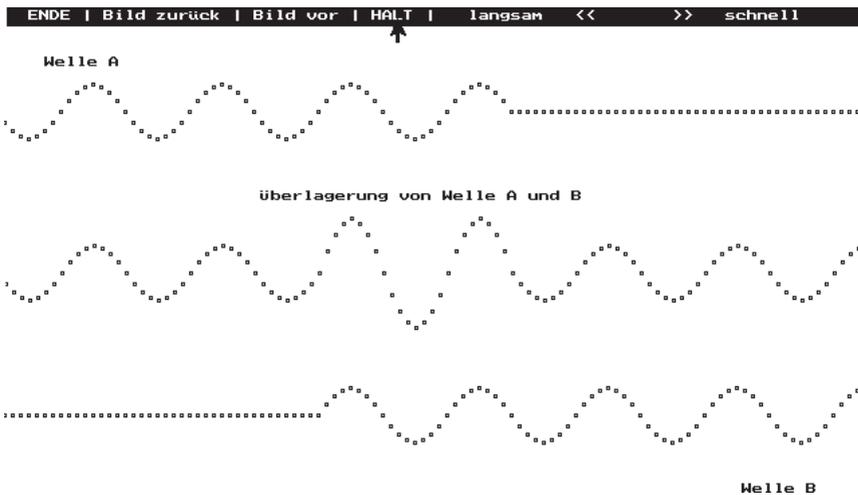


Abb. 4: Bildschirmkopie (Momentaufnahme) aus dem Programm zur Erklärung der Entstehung stehender Wellen als Überlagerung gegeneinanderlaufender Wellen gleicher Amplitude und Wellenlänge (Welle A läuft nach rechts, Welle B nach links). In der Computersimulation ist dort, wo sich die Wellenzüge überlagern, eindeutig eine stehende Welle zu erkennen.

legend andersartige physikalische Phänomene gegeneinander abzugrenzen und auf Besonderheiten eines Ansatzes und auf seine Grenzen hinzuweisen. Auch hier bieten sich Hilfen durch den Computer an.

So sind Wasserwellen genau genommen nicht durch dieses einfache Modell zu beschreiben. Sie sind keine reinen Transversalwellen. Die Bewegungen sind komplizierter. Schwebeteilchen im Wasser bewegen sich bei Wellen auf annähernd kreisförmigen Bahnen mit einer ortsabhängigen Phasenverschiebung. Wie dies mit den bekannten Wellenerscheinungen an der Oberfläche zusammenhängt, ist ebenfalls in einer Computersimulation darstellbar (siehe Abb. 9).

Wie bereits angedeutet, wird durch eine Simulation nach Kapitel 2 eigentlich kein Kontinuum beschrieben, sondern eine lineare Kette bzw. eine Gitterstruktur. Daraus resultieren Wellen mit Dispersion.

Die Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Wellenlänge zeigt sich insbesondere, wenn man als Ausgangssituation eine stufenförmige Störung vorgibt. Nach Fourier läßt sich diese als Überlagerung von Wellen eines breiten

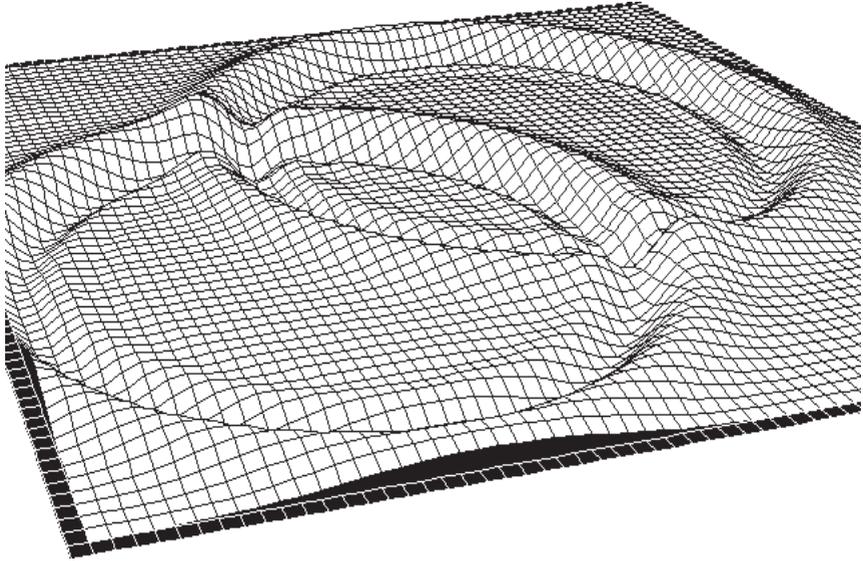


Abb. 5: Ungestörtes Durchdringen zweier Kreiswellen

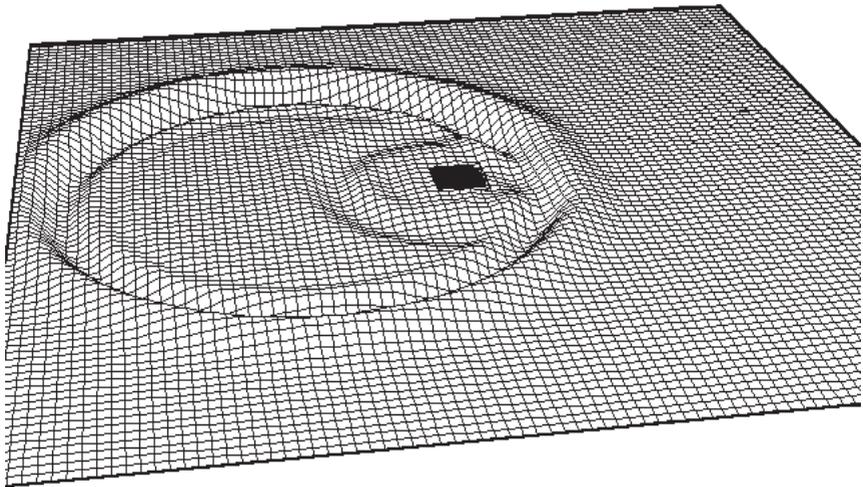


Abb. 6: Streuung von Wellen an einem Hindernis

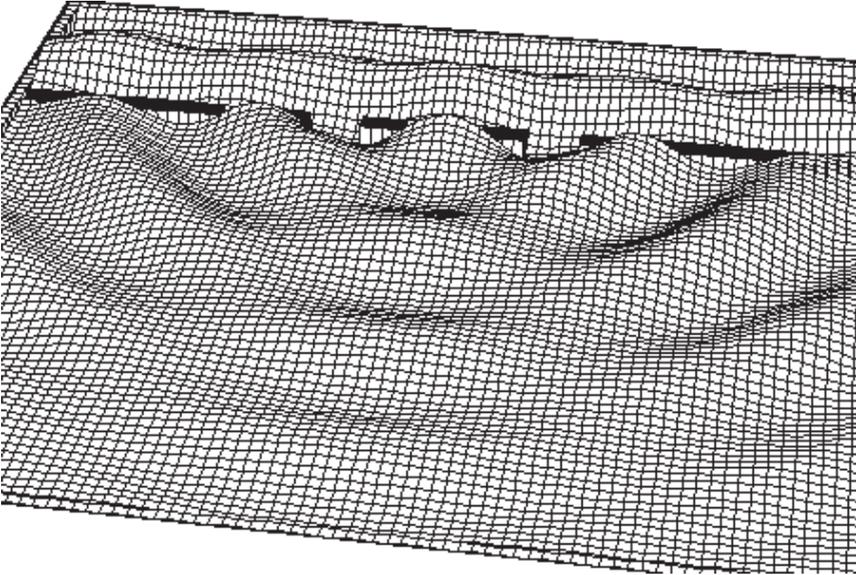


Abb. 7: Interferenz am Doppelspalt

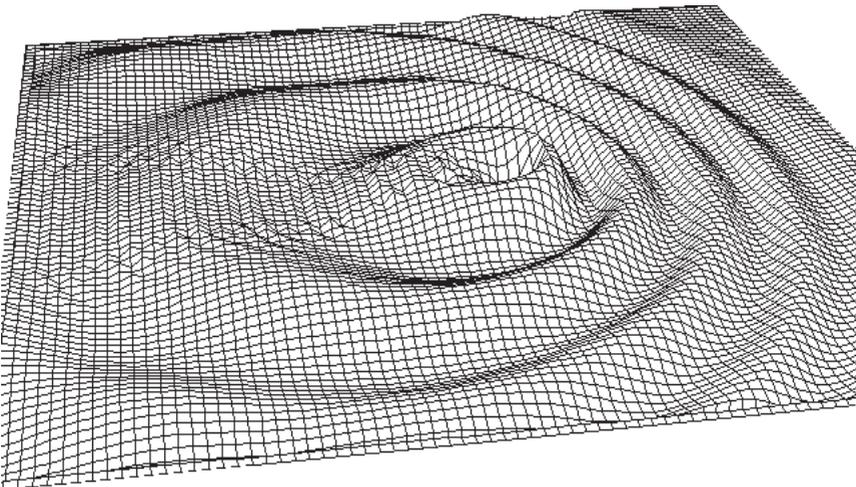


Abb. 8: Dopplereffekt (bewegter Sender)



Kreisbewegung der Teilchen in Uhrzeigersinn => Welle läuft nach rechts.

Abb. 9: Bildschirmkopie aus einer Programm zur Erklärung von Wasserwellen als Zirkulation des Wassers innerhalb kleiner Volumina. Die Momentaufnahme kann jedoch nur einen unvollständigen Eindruck vermitteln, wie aus der Zirkulation innerhalb kleiner Volumina die Wellenbewegung zustandekommt.

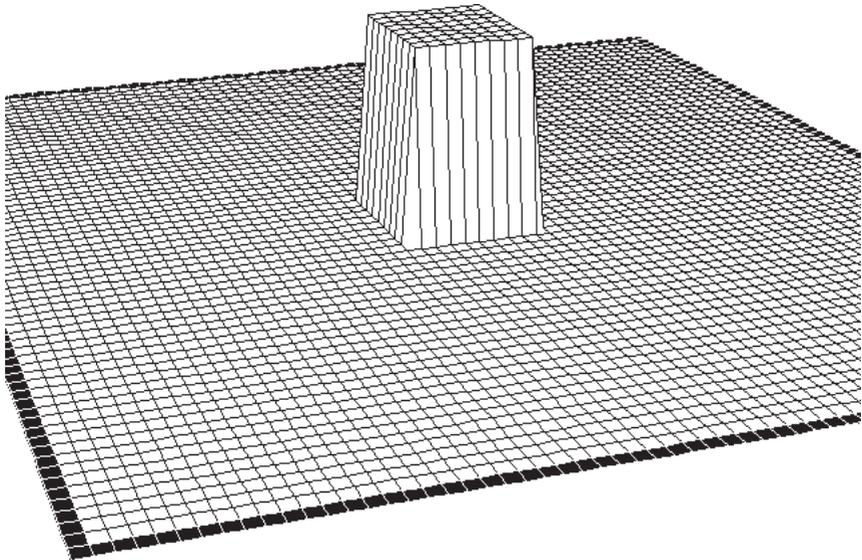


Abb. 10a: Bildausschnitt aus dem Computerfilm zur Wellenausbreitung mit Dispersion

Frequenzbandes verstehen. Wellen mit großen Wellenlängen laufen dann mit größeren Geschwindigkeiten auseinander als die kurzwelligeren. Überzeugend verdeutlicht dies erst der Computerfilm (siehe Abb. 10).

Mit den Programmen MEDIUM1D und MEDIUM2D lassen sich außerdem auch Wärmeleitungsprozesse simulieren. Dies bietet die Möglichkeit, charakteristische Unterschiede aufzuzeigen und die Prozesse gegeneinander abzugrenzen.

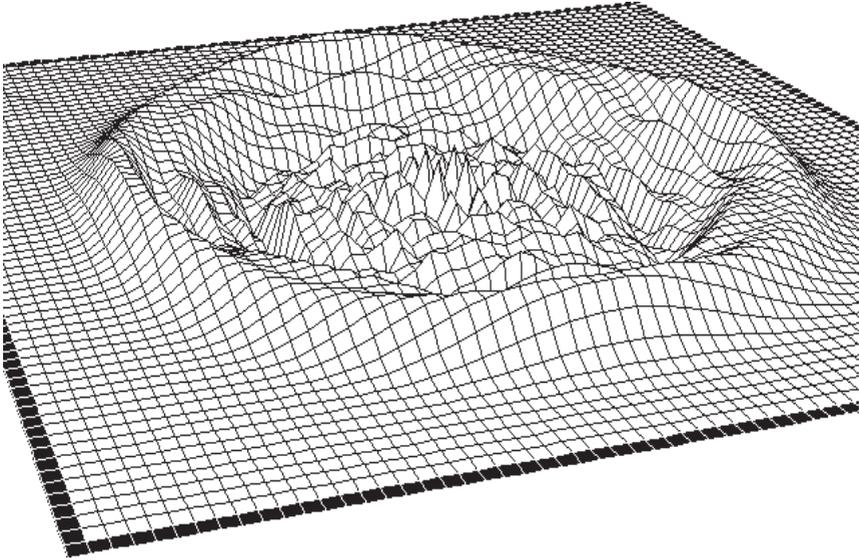


Abb. 10b: Bildausschnitt aus dem Computerfilm zur Wellenausbreitung mit Dispersion

4 Schlußbemerkung

Die numerische Behandlung von Wellen umgeht die Auseinandersetzung mit partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Wellengleichung) und senkt dadurch deutlich das mathematische Anforderungsniveau. Die Differentialrechnung wird auf den Umgang mit Differenzenquotienten reduziert. Darüber hinaus wird nur die Kenntnis grundlegender physikalischer Gesetze (Hookesches Gesetz, 2. Newtonsches Axiom) verlangt. Die Betrachtungen dürften damit auch in der gymnasialen Oberstufe unproblematisch sein.

Der Themenbereich Wellen bleibt modular strukturiert und ist damit auch für unterschiedliche Anwendungen gut anzupassen. Als übergeordnete Strukturblöcke könnte man z.B. sehen:

- Grundlagen für die Entstehung von Wellen
- Elementare Definitionen und Beschreibungsmöglichkeiten
- Fundamentale Phänomene und Prinzipien der Wellenausbreitung.

Bei Verwenden des finiten Differenzenverfahrens läßt sich der erste Bereich gut gliedern, z.B. in:

- Begründen eines linearen Kraftansatzes,
- Aufstellen von Bewegungsgleichungen für einen Gitterpunkt,
- Ersetzen der Beschleunigung durch Differenzenquotienten,

- Umformen und Angeben eines expliziten Lösungsansatzes,
- Realisieren von konkreten Anwendungen.

Auch für die Veranschaulichung grundlegender Definitionen, Phänomene und Prinzipien wurden einige Hilfsmittel vorgeschlagen. Sie sollen aber nicht unüberlegt bestehende Methoden verdrängen, insbesondere keine experimentellen Untersuchungen, sondern sind primär als Ergänzung bzw. methodische Erweiterungen gedacht.

Der numerische Ansatz bietet auch für weiterführende physikalische Betrachtungen interessante Perspektiven. Läßt man die Gitterabstände und Zeitintervalle immer kleiner werden, bzw. vollzieht man den Übergang von Differenzenquotienten zu Differentialquotienten, kommt man auf die d'Alembertsche Wellengleichung. Werden andererseits Massen, Gitterabstände und Kopplungsgrößen auf die Verhältnisse in einer Kristallstruktur abgestimmt, lassen sich Wellen / Phononen im Festkörper studieren.

Darüber hinaus wird mit der finiten Differenzenmethode ein iteratives Verfahren vorgestellt, das zeitgemäß eine Berechnungsmethode am Computer erschließt.

5 Literatur und Bezugsquelle

Dittmann, H.: "Taschenrechner als Wellenmaschine", in PhuD 1, 1979, S. 24-36

Dörner, D.: "Problemlösen und Informationsverarbeitung",

Kohlhammer Verlag, Stuttgart 1976

Finck von Finckenstein: "Einführung in die Numerische Mathematik Bd.2",

Hanser Verlag, München 1978

Girwidz, R.: "Numerische Methoden in der elementaren Wellenlehre",

in MNU 49/1, (1996), 5-11.

Marsal, D.: "Finite Differenzen und Elemente", Springer-Verlag, Berlin 1989

Computerprogramme:

Die Programme können über den Netzserver des Physikalischen Instituts der Universität Würzburg oder mit Beschreibungen gegen einen Unkostenbeitrag von 20DM vom Autor bezogen werden.

