

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 4

ISBN 3 - 7896 - 0588 - 9

Verlag Palm & Enke, Erlangen und Jena 1998

Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle
genutzt werden. Auf der Homepage

www.solstice.de

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

H. Dittmann, W.B. Schneider

Farbenlehre für den Physikunterricht

1 Einleitung

Das Thema "Farbe" hat viele Aspekte und Bezüge, nicht nur zur Physik, sondern auch, oder sogar mehr noch, zur Physiologie, zu Ästhetik und Kunst, zur Technik und zur Werbung. Das Thema reicht also weit über die Grenzen der Physik hinaus. Im konventionellen Physikunterricht der Sekundarstufe I fristet es als Anhängsel der Optik meist ein Schattendasein. Der Grund für die in der Regel recht stiefmütterliche Behandlung der Farben liegt nicht nur in der knappen Zeit, die dem Optikunterricht zur Verfügung steht. Ein gewichtiger, wenn auch wohl uneingestander Grund liegt darin, daß "Farbe" etwas ist, das sich nicht zwanglos in den üblichen Kanon objektiver physikalischer Begriffe einfügen läßt. Zur "Farbe" gehört nämlich zweierlei: Erstens Licht mit einer bestimmten spektralen Intensitätsverteilung, das den Reiz liefert, und zweitens das Auge und der Mensch selbst, der den Reiz erst als Farbe empfindet. Ohne menschliches Empfinden gäbe es keine Farbe. Menschliche Empfindungen aber werden innerhalb der Physik als Fremdkörper empfunden.

Wir meinen, daß der Physikunterricht an allgemeinbildenden Schulen sich nicht an zu eng gezogenen fachlichen Grenzen orientieren darf, sondern - ausgehend von dem soliden Fundament an im Unterricht erworbenen physikalischen Kenntnissen und Fertigkeiten - das Recht und die Pflicht hat, gerade auf solche Randthemen einzugehen, die den Menschen so unmittelbar betreffen. Wegen der Verzahnung mit anderen Disziplinen ist das Thema Farbe besonders geeignet, diesem Anliegen im Unterricht unter themen- oder fächerübergreifenden Gesichtspunkten gerecht zu werden.

Im folgenden soll darin erinnert werden, welchen Beitrag der Physikunterricht zu diesem Thema im Physikunterricht leisten kann. Bei dieser Zusammenstellung, die eine direkte Anregung für den Unterricht darstellen soll, greifen wir auf Bekanntes zurück. Neu ist die Einbeziehung des Computers als besonders geeignetes Medium zur Herstellung, Untersuchung und Veranschaulichung von Farben. Leider lassen sich die im Text erwähnten Farbbeispiele hier nur schwarz-weiß wiedergeben. Sie können jedoch neben den erwähnten Programmen über das Internet abgerufen oder bei uns bestellt werden [6].

2 Ein Einstieg in die Farbenlehre mit Goethe

Goethe beschreibt in seiner Farbenlehre [1] zwei Versuche, die sich als Einstieg in die Farbenlehre hervorragend bewährt haben, die wir hier aus Platzgründen gleich als Vorführexperiment vorstellen. Es handelt sich um die Erzeugung und Interpretation eines normalen Spektrums und des dazu komplementären. Die Versuche lassen sich besonders einfach und lichtstark mit Hilfe eines Overheadprojektors

und eines Prisma verwirklichen. Dazu wird das Prisma direkt hinter das Projektionsobjektiv geeignet angebracht.

Im ersten Versuch, bei dem es sich um die gewöhnliche Anordnung zur Erzeugung eines Spektrums handelt, wird die Schreibfläche mit einem Karton abgedeckt, wobei in der Mitte ein Streifen von ca. 5mm x 30mm herausgeschnitten ist. Das so entstandene Fenster dient als Spalt. Auf der Projektionsfläche beobachtet man ein helles Spektrum.

Zur Deutung dieses Versuchs, die allerdings mit Goethes Deutung nichts zu tun hat, kann man so vorgehen: Man legt über den Spalt ein dichtes Rotfilter, so daß nur rotes Licht durch das Prisma gelangt. Das "normale" Spektrum verschwindet, man sieht statt dessen nur noch einen seitlich verschobenen roten Balken - offenbar das Bild des Spaltes in der Schablone, das zur Seite hin abgelenkt ist, was aus der (vorher im Unterricht durchgenommenen) Brechung des Lichtes an den Flächen des Prismas verständlich wird. Ersetzt man das Rotfilter durch ein grünes, so sieht man als Bild einen grünen Balken, aber an einer anderen Stelle, die einer größeren Ablenkung entspricht. Mit einem blauen Filter erhält man noch größere Ablenkung des Bildes. Grünes Licht wird also stärker gebrochen als rotes, und blaues noch stärker. Nimmt man nun die Filter wieder weg und schickt weißes Licht durch den Spalt, so erscheinen die verschiedenfarbigen Spaltbilder gleichzeitig und geben in ihrer Aneinanderreihung das Spektrum. Das Spaltbild ohne Prisma ist somit die Überlagerung aller Spaltbilder mit Prisma, wie sich folgendermaßen mit einer elastischen, spiegelnden Folie (Hochglanzfolie einer Trockenpresse, oder Folie für Dekorationszwecke) demonstrieren läßt:

Man bildet das Spektrum über die Folie auf eine weiße Fläche ab. Bei der Biegung der Folie in der einen Richtung (Konvexspiegel) wird das Spektrum auseinandergezogen, bei entgegengesetzter Biegung (Konkavspiegel) zusammengeschoben bis schließlich wieder ein weißes Spaltbild entsteht.

Ein Farbfilter fügt somit dem weißen Licht keine "Farbe" hinzu, sondern hält nur alle Anteile des weißen Lichtes zurück, die "andere Farbe" haben. Deswegen macht das Filter das Licht auch immer dunkler.

Im zweiten Versuch verwendet man die in Abb. 1a,b gezeigte Schablone, die schon Goethe vorgeschlagen hat (s. [1], Band 1, S. 68). In 1a) ist die Anordnung wie in Versuch 1 mit dem Spalt (5mm x 30mm) gezeigt. Darunter in 1b) wird der in 1a) herausgeschnittene Streifen in das ebenfalls herausgeschnittene Fenster (ca. 100mm x 30mm) montiert. Man beobachtet für den Spalt das herkömmliche Spektrum (Abb. 1c) und darunter ein Spektrum (Abb. 1d) in den sogenannten Komplementärfarben.

Die Deutung ist (auch im Wortlaut) genau komplementär. Deckt man den Spalt in 1a) ab und legt über das durchsichtige Fenster in 1b) ein Rotfilter, so verschwindet das "komplementäre" Spektrum und statt dessen erscheint ein schwarzer Balken, seitlich abgelenkt, als Bild des schwarzen Streifens; schwarz heißt in

diesem Fall: an diese Stelle gelangt *kein rotes* Licht. Ein Grünfilter gibt ein stärker abgelenktes Bild des Streifens an einer Stelle, an die *kein grünes* Licht gelangt, usw. Nimmt man die Farbfilter weg, so entsteht das komplementäre Spektrum, bei dem jetzt an jeder Stelle aus dem weißen Licht genau eine Farbe des “normalen” Spektrums fehlt. Würde man diese Farbe wieder hinzufügen, so wäre die Stelle wieder weiß.

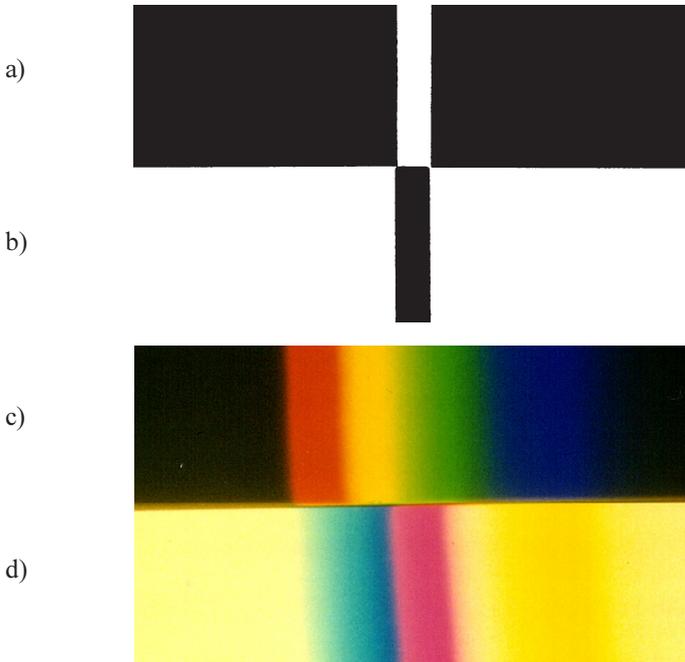


Abb.1: a) Schablone zur Erzeugung eines normalen und b) eines komplementären Spektrums; c) Photographie des mit der Schablone in a) erzeugten normalen und des darunterliegenden, komplementären Spektrums d).

Im Vergleich der beiden untereinander angeordneten Spektren wird die Bedeutung der Komplementärfarben besonders deutlich: Mit einem ebenen Spiegel läßt sich eines der beiden Spektren auffangen, bevor es die Projektionsfläche erreicht. Man kann den Spiegel so kippen, daß die komplementären Farben, die vorher übereinander standen, nun genau aufeinander treffen. Beide Spektren ergänzen sich dann in ihrer gesamten Ausdehnung zu einem weißen Streifen.

Die beschriebenen Versuche machen auch klar, was hier und im folgenden gemeint ist, wenn von “Farbe” gesprochen wird. Denn mit diesem Wort der Umgangssprache kann durchaus Verschiedenes gemeint sein: z. B. eine Substanz, die man mit dem Pinsel auf eine Fläche aufträgt, oder eine Eigenschaft eines

Gegenstandes (ein roter Bauklotz), oder ein Name für einen mehr oder weniger abstrakten Begriff wie “Kinder lieben Rot”, oder im physikalischen Sinn ein bestimmter Frequenzbereich des Spektrums. All das meinen wir hier nicht. Farbe ist vielmehr das, was wir empfinden, wenn Licht in unser Auge gelangt. Zur Farbe gehört zweierlei: Erstens das Licht, zweitens unser Auge, das auf den Lichtreiz mit einer Farbempfindung reagiert. Die Fachsprache unterscheidet genauer den “Farbreiz”, das ist das die Empfindung auslösende Licht, und die “Farbvalenz”, die im Auge ausgelöste Empfindung. Wenn hier vom Auge die Rede ist, so ist damit nicht nur der Augapfel gemeint, sondern unser ganzes visuelles System, also auch die Nervenbahnen und jene Teile des Gehirns, welche die von der Netzhaut kommenden Reize verarbeiten.

2 Additive Mischung von Farben¹

Eine wichtige Frage drängt sich auf, wenn man das im ersten Versuch erzeugte Spektrum anschaut: Zeigt es uns alle Farben, oder gibt es noch andere? Es fällt auf, daß die “Spektralfarben” sehr intensiv wirken - wir sagen besser “satt” oder “gesättigt”, das ist der Fachausdruck. Die Farben, welchen man im täglichen Leben begegnet, wirken viel zarter, “ungesättigter”. Solche Farben kann man aus den Spektralfarben leicht erhalten: Man muß nur weißes Licht dazu mischen, z.B. indem man das auf der Projektionsfläche dargestellte Spektrum mit einer hellen Experimentierleuchte anleuchtet. Je näher man die Experimentierleuchte heranzubringt, je mehr man also an weißem Licht dazu mischt, desto ungesättigter erscheinen die Farben im Spektrum, bis sie vom weißen Licht schließlich nicht mehr zu unterscheiden sind. Neben dem *Farbton*, der sich aus der Lage im Spektrum bestimmt, ist also der Grad der *Sättigung* (d.h. also der Anteil an weißem Licht) ein weiteres Kennzeichen der Farben. Die Farben des Spektrums sind voll gesättigt, alle Farben nähern sich dem Weiß umso mehr, je ungesättigter sie sind.

Das Zumischen von weißem Licht zu den Spektralfarben ist bereits ein einfaches Beispiel von additiver Farbmischung. Diese läßt sich systematischer und einfacher wieder mit dem Overheadprojektor demonstrieren, über den eine Schablone mit drei Fenstern, in die jeweils ein Rot-, Blau und Grünfilter eingepaßt ist, auf eine Projektionsfläche abbildet wird. Geeignete Farbfilter werden von Lehrmittelfirmen angeboten [6]. Sie können jedoch auch selbst hergestellt werden (s. Abschnitt 6). Mit einem ebenen Spiegel kann man den Lichtanteil eines der Fenster vor dem Projektionsschirm abfangen und auf das Bild eines der anderen Fenster umlenken. So findet man heraus, daß ein schöner Purpurton (“Magenta” in der Computersprache) entsteht, wenn man blaues und rotes Licht mischt.

¹ Im obigen Sinn (Kap. 1) kann man Farben nicht mischen. Wir schließen uns hier jedoch aus praktischen Erwägungen der üblichen Sprechweise an und meinen das Mischen von Lichtanteilen, die z.B. von gefärbten Papier oder vom Bildschirm ausgehen und als Farbreiz über den Sehapparat die zugehörige Farbvalenz bewirken.

Durch geeignete Neigung des Spiegels läßt sich die Fläche, auf die das aufgefangene Licht projiziert wird, verkleinern und vergrößern, so daß das zugemischte Licht sich mehr oder weniger intensiv auswirkt. Auf diese Weise lassen sich verschiedene Purpurtöne erhalten, die je nach Spiegelstellung mehr an Blau oder an Rot grenzen. Bei der Mischung von Blau und Grün ergibt sich - wenig überraschend - Blaugrün ("Cyan" in der Computersprache); überraschend ist aber das Ergebnis der Mischung von Grün und Rot, das zu Gelb führt. Durch Mischung von Rot, Grün und Blau kann Weiß erhalten werden; zum Umlenken werden dann zwei Spiegel benötigt. Durch leichtes Kippen dieser Spiegel läßt sich ein Farbstrich des Weißen ins Rote, Blaue oder Grüne beseitigen.

Es gibt auch andere Möglichkeiten, Licht unterschiedlicher Farbe additiv zu mischen. Wohlbekannt sind die Farbkreisel, die durch rasche Rotation die zu mischenden Lichtanteile dem Auge intermittierend darbieten, was wegen der Trägheit des Auges zum gleichen Ergebnis führt wie die simultane Darbietung. Am besten schneidet man sich aus dünnem Farbkarton je eine rote, grüne, blaue, schwarze und weiße Kreisscheibe von ca. 20 cm Durchmesser aus, die man in der Mitte mit einem Loch versieht, um sie auf die Achse eines Experimentiermotors spannen zu können. Schneidet man jede Scheibe längs eines Radius auf, so kann man, wenn mehrere der Scheiben auf der Achse sitzen, jeweils einen beliebigen Sektor einer dahinter befindlichen Scheibe über die davor stehende ragen lassen, so daß man z. B. $\frac{1}{3}$ Rot mit $\frac{2}{3}$ Grün durch rasche Rotation mischen kann. Es können auch drei und mehr farbige Lichtanteile durch diesen Trick in beliebig einstellbaren Anteilen gemischt werden. Die Drehrichtung muß so gewählt werden, daß die Scheiben nicht durch den scharfen Luftstrom, dem sie ausgesetzt sind, auffächern. Bei der Mischung von Rot und Grün wird man hier allerdings zunächst etwas enttäuscht. Bei normaler Raumbeleuchtung erscheint die Mischfarbe eher Braun als Gelb. Setzt man die rotierenden Scheiben aber in den Lichtkegel einer starken Experimentierleuchte, so wird aus dem Braun tatsächlich ein strahlendes Gelb. Dieser Versuch zeigt, daß der Farbeindruck auch stark von der Helligkeit abhängt.

Neben *Farbton* und *Sättigung* ist die *Helligkeit* der dritte Parameter, der die Farbempfindung beeinflusst. Dies läßt sich durch weitere Versuche mit den Farbkreisen belegen. Führt man nämlich den Mischversuch noch einmal durch, indem man dem roten und dem grünen Sektor einen schwarzen hinzufügt, so wird bei gleichbleibender Beleuchtung die Helligkeit gemindert, denn bei jeder Scheibenumdrehung gelangt nun weniger rotes und grünes Licht ins Auge; aus dem strahlenden Gelb wird wieder helles oder dunkles Braun, je nach Winkel des schwarzen Sektors. Auch die Wirkung einer Zugabe von weißem Licht durch einen entsprechenden weißen Sektor läßt sich mit dieser Anordnung studieren; sie führt zu einer Verminderung der Sättigung: Aus Rot wird z.B. Rosa, aus Gelb wird Elfenbein.

Additive Farbmischung ist noch durch einen weiteren Trick möglich, der seit alters her in der Malerei und auch in der Druck- und der Textiltechnik verwendet wird: Kleine Pünktchen unterschiedlicher Farbe werden so eng nebeneinander gesetzt, daß sie vom Auge nicht mehr getrennt wahrgenommen werden können. Das Auge sieht dann die additiv hergestellte Mischfarbe. Die Monitore unserer Computer und Farbfernseher verwenden auch dieses Prinzip der Farbmischung. Untersucht man einen weißen Fleck auf dem Bildschirm, so erkennt man in regelmäßiger Anordnung rote, grüne und blaue Pünktchen (Pixel), das sind die Grundfarben, aus welchen alle weitere Farben entstehen. Sieht man sich eine gelbe Fläche auf dem Bildschirm an, so erkennt man mit der Lupe, daß nur die roten und die grünen Pixel eingeschaltet sind, während die blauen dunkel bleiben. Bei einer orangefarbenen Fläche erkennt man, daß die roten Pixel in voller Helligkeit leuchten, die grünen aber weniger hell. Bei Installation einer Grafikkarte mit 3×8 bit Farbtiefe lassen sich die Helligkeiten der Farbpixel einer jeden Grundfarbe in 256 Stufen (0 - 255) einstellen, so daß es für jedes "Dreigestirn" aus einem roten, grünen und einem blauen Pixel $256^3 = 16777216$ Möglichkeiten gibt, die (wenigstens theoretisch) zu ebensoviel verschiedenen Mischfarben führen und sich darstellen lassen. Die vom Auge unterscheidbaren Farbvalenzen werden in der Literatur mit 1 - 2 Millionen angegeben.

3 Farbkörper als Ordnungstifter in der Welt der Farben

Das Fazit der Versuche mit dem Farbkreis ist folgendes: Jede Farbe kann erhalten werden, wenn man erstens den geeigneten Farbton aussucht (also den geeigneten Anteil des kontinuierlichen Spektrums bzw. des komplementären Spektrums), zweitens dazu mehr oder weniger weißes Licht mischt, also die richtige Sättigung einstellt, und drittens das Licht dem Auge in geeigneter Helligkeit darbietet. Da jeder der drei Parameter Farbton, Sättigung und Helligkeit jeweils ein Kontinuum umfaßt, kann man sagen: Die Welt der Farben ist dreidimensional. Will man die Mannigfaltigkeit aller Farben darstellen, indem man jeder Farbe einen Raumpunkt zuordnet, so kommt man zu Farbkörpern, die je nach Anordnung diese oder jene Gestalt haben; eine Darstellung der Farben in der Ebene aber muß mit einem Verzicht auf Vollständigkeit erkaufte werden.

Der Computer macht es uns heute sehr leicht, derartige Farbkörper darzustellen und sogar aufzuschneiden, um auch die innen verborgenen Farben zu sehen. Um dies zu demonstrieren, wurden von uns entsprechende Programme [6] hergestellt, die wir im folgenden auszugsweise vorstellen.

Das Programm FARBZYL.EXE legt der räumlichen Darstellung die Parameter Farbton, Sättigung und Helligkeit, die sog. Helmholtzschen Koordinaten, zu Grunde und führt zu einem Farbzylinder. Nach dem Programmstart ("Start 1") erscheint zunächst ein Farbkreis, der alle Farbtöne auf einer Kreisscheibe darstellt (s. Abb. 2). Die Farben des Spektrums beginnen links unten mit Rot; im Uhrzeigersinn folgen dann Orange, Gelb, Grün, Blaugrün ("Cyan"), Blau und Violett. Der Farb-

kreis schließt sich unten mit den Purpurtönen (“Magenta”). Alle Farbtöne erscheinen in der dem Monitor höchstmöglichen Sättigung. Setzt man die Maus an eine beliebige Stelle des Kreises, so kann man in den drei kleinen Fenstern rechts die Helligkeitsstufen der Grundfarben an dieser Stelle ablesen. Eine Besonderheit der Farbanordnung liegt darin, daß diametral gegenüberliegende Farben im Kreis stets komplementär sind. Der Farbkreis stellt von den drei Dimensionen der Farbwelt nur die erste dar: den Farbton. Mit “Start 2” kommt die zweite Dimension, die Sättigung hinzu: Alle Punkte der Kreisscheibe werden neu gezeichnet, und zwar so, daß die Sättigung nach innen kontinuierlich abnimmt bis zum total ungesättigten Weiß in der Mitte (s. Abb. 2). Mit der Maus kann wieder erkundet werden, wie die abnehmende Sättigung sich in den Helligkeitsstufen der Grundfarben widerspiegelt. Die Kreisscheibe zeigt nun eine zweidimensionale Farbmännigfaltigkeit. Mit “Start 3” kann schließlich die noch fehlende dritte Dimension der Helligkeit erkundet werden. Die Kreisscheibe wird nun fortlaufend von neuem gezeichnet, allerdings mit immer geringerer Helligkeit, bis sie schließlich schwarz erscheint. Die immer dunkler werdenden Kreisscheiben sind äquidistante Schnitte durch den Farbzylinder. Seine Achse stellt die sog. “unbunte Farbe” dar; sie ist oben weiß, unten schwarz, dazwischen kommen verschiedene Graustufen. Der Zylindermantel zeigt alle Farbtöne in maximaler Sättigung, oben in der hellsten Stufe, unten in der niedrigsten Helligkeitsstufe schwarz.

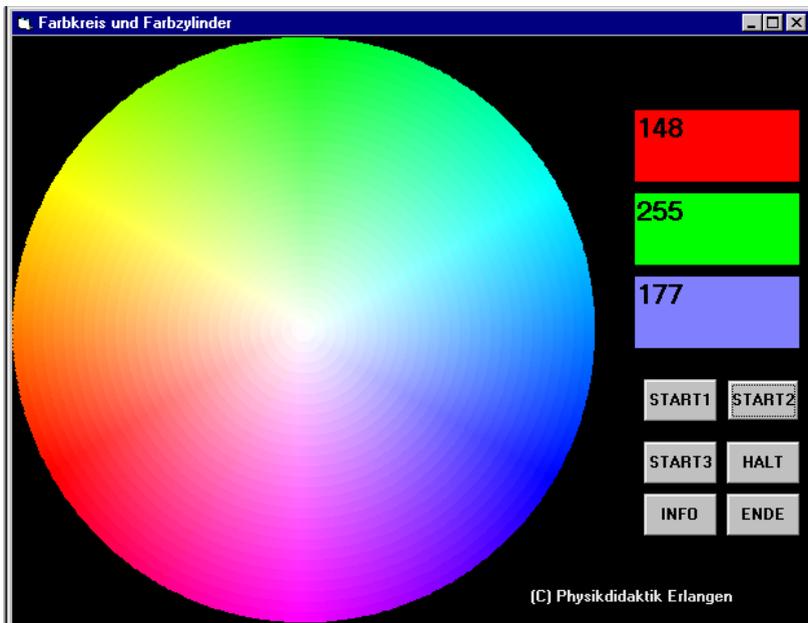


Abb.2: Farbkreis mit allen Farbtönen in verschiedenen Sättigungsgraden

Wenn man eine Ordnung in die Welt der Farben bringen will, bieten sich neben den *Helmholtzschen* (Farbton, Sättigung und Helligkeit) die sog. *trichromatischen* Koordinaten an, das sind die Helligkeitswerte r , g , und b der drei Grundfarben Rot, Grün und Blau. Bezieht man sich auf den Computer, so können diese Koordinaten jeweils die ganzzahligen Werte von 0 (Minimum) bis 255 (Maximum) annehmen. Es ist naheliegend, jeder Farbe einen Raumpunkt in einem dreidimensionalen cartesischen Koordinatensystem zuzuweisen; dann entsteht der sog. Farbwürfel, der mit dem Programm FARBW.EXE (Farbwürfel) studiert werden kann.

Eine besonders interessante Darstellung der Farben in einer ebenen Figur bietet das Programm FARBDR.EXE. Es stellt ein Farbdreieck dar, bei dem die trichromatischen Farbkoordinaten r , g , b gleichzeitig als Ortskoordinaten verwendet werden. Damit aus der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit eine in der Ebene darstellbare zweidimensionale wird, ist die Summe $r + g + b = 255 = \text{konstant}$ gesetzt. Dann sind nur 2 der drei Koordinaten unabhängig wählbar, z. B. r und g ; die dritte Koordinate b ergibt sich aus den ersten beiden. Mit $r + g \leq 255$ erhält man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck zwischen der r - und der g -Achse, das alle Farbtöne enthält. Will man der grundsätzlichen Gleichberechtigung der drei Grundfarben Rechnung tragen, so ist es zweckmäßig, statt der rechtwinkligen Koordinatenachsen schiefwinklige zu nehmen mit einem Winkel von 60° . Das Farbdreieck wird dann gleichseitig. Das

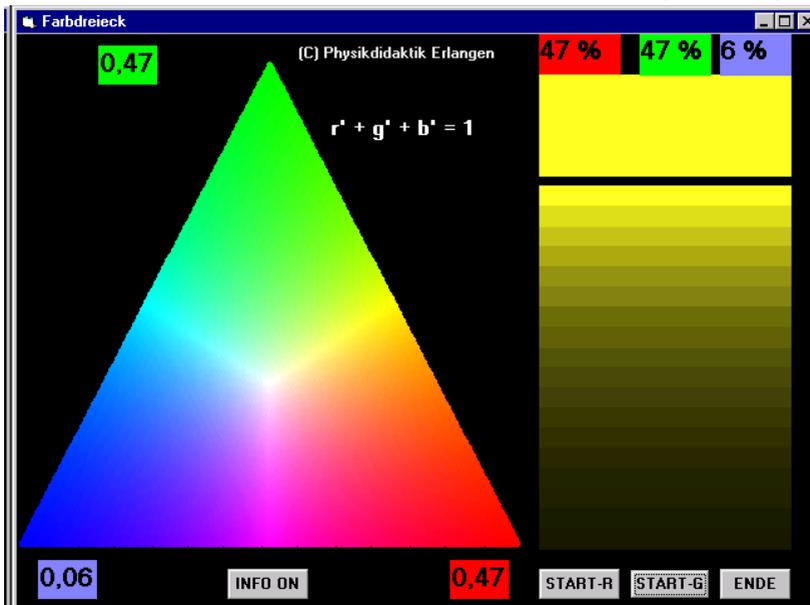


Abb. 3: Farbdreieck

Programm FARBDR.EXE läßt beide Darstellungsarten zu. Der Punkt, auf den der Mauszeiger deutet, ist durch ein prozentuales Verhältnis der drei Primärfarben gekennzeichnet, das man in den drei Fenstern rechts oben ablesen kann (s. Abb.3). Der Farbton wird dann rechts noch in verschiedenen Helligkeitsstufen angezeigt (die dritte Dimension der Farbwelt).

Das Farbdreieck hat interessante Eigenschaften, die sich in dem sog. Schwerpunktssatz von Graßmann² äußern: Wenn man zwei Punkte F_1 und F_2 herausgreift und die dazu gehörigen Lichtanteile additiv mit dem Intensitätsverhältnis 1:1 mischt, so hat die Mischung (abgesehen von der Helligkeit) jene Farbe, die man im Farbdreieck in der Mitte der Strecke F_1F_2 findet. Mischt man die Farben der Punkte F_1 und F_2 in einem anderen Intensitätsverhältnis, so ist der dieser Mischung entsprechende Farbpunkt der Schwerpunkt von F_1 und F_2 , der diesem Verhältnis entspricht.

Wenn die Koordinaten von F_1 und F_2 durch (r_1, g_1, b_1) bzw. (r_2, g_2, b_2) gegeben sind, so hat der Mittelpunkt die Koordinaten $(\frac{1}{2}(r_1+r_2), \frac{1}{2}(g_1+g_2), \frac{1}{2}(b_1+b_2))$. Sieht man von dem gemeinsamen Faktor $\frac{1}{2}$ ab, der nur die Gesamthelligkeit betrifft, so gilt also für die in der Mitte vorhandene Farbe, daß sie aus den ursprünglichen Farben F_1 und F_2 durch Addition der Grundfarben, also durch additive Mischung entsteht. So gesehen, erscheint der Graßmannsche Satz fast trivial - es scheint sich nur etwas analytische Geometrie dahinter zu verbergen. In Wirklichkeit ist er aber alles andere als trivial, er ist vielmehr fundamental für unser Farbempfinden. Das wird klar, wenn man daran denkt, daß die Farbvalenzen F_1 und F_2 nicht unbedingt durch die drei vom Computer verwendeten Primärlichtanteile (Rot, Grün, Blau) erzeugt sein müssen, sondern zu ganz anderen recht komplizierten Spektren gehören können. Solche Lichtanteile, die für unser Auge gleiches Aussehen haben, aber zu verschiedenen Spektren gehören, nennt man *metamer*.

Auch dann gilt nämlich der Satz von Graßmann, und dies ist das eigentlich Erstaunliche daran. Der Satz läßt sich auch kurz so formulieren: Bei der additiven Mischung zweier Farben ändert sich nichts am Aussehen der Mischfarbe, wenn man die Mischpartner durch metamere ersetzt. Metamere Farben sind so interessant und fundamental, daß man sie im Unterricht zeigen sollte: Man legt dazu auf die Schreibfläche des Overheadprojektors einen Karton mit einem Fenster, das durch ein geeignetes Gelbfilter abgedeckt wird. Auf der Projektionsfläche erscheint eine gelbe Fläche. Dann entzündet man einen Camping-Gasbrenner, bringt in die Flamme etwas Kochsalz und projiziert mit einer Linse die leuchtend gelbe Flamme auf den Schirm, neben die gelbe Fläche des Filters. Hat man das richtige Filter gewählt, so ist das Auge nicht in der Lage, einen Unterschied in den Farben zu erkennen. Daß die Farben dennoch in ihrer Art grundverschieden sind, erkennt man, wenn man sie nicht auf dem weißen Schirm, sondern auf einem grünen oder

² Hermann Graßmann (1809 - 1877) ist den Mathematikern als einer der Begründer der Vektor- und Tensorrechnung bekannt, den Philologen als bedeutender Sanskritforscher.

einem roten Karton auffängt, der im Gelbfilterlicht seine Farbe etwa beibehält, im Licht der Flamme jedoch grau erscheint.

Der Satz von Graßmann hat einige interessante weitere Folgen: In der Mitte des Dreiecks befindet sich der Unbuntpunkt oder Weißpunkt, gekennzeichnet durch gleiche Werte von r , g und b . Alle Farbpunkte, die auf einem vom Weißpunkt ausgehenden Strahl liegen, haben den gleichen Farbton, denn man kann sie nach dem Graßmannschen Satz herstellen durch Mischung von Weiß mit jener Farbe, die am Rand des Dreiecks liegt und die größte Sättigung aufweist. Leicht sieht man auch folgendes: Mischt man zwei Farben additiv, so ist die Mischung weniger stark gesättigt, als der Mischpartner mit der höheren Sättigung. Beim Mischen vieler Farben sinkt daher in der Regel die Sättigung. Weiter sind die Farben, die auf dem Rand des Dreiecks diametral gegenüberliegen, komplementär. Ihre additive Mischung gibt weiß.

Eine wichtige Frage ist noch offen: Enthält unser Farbdreieck - von der Helligkeit einmal abgesehen - nun alle Farben? Die Antwort lautet: Leider nein! Der Monitor des Computers kann zwar, wie wir gesehen haben mit einer Grafikkarte von 24 bit Tiefe über 16 Millionen Farbkombinationen herstellen, aber eben doch nicht alle Farben. Was fehlt, sind die Spektralfarben, von denen er nur drei in voller Sättigung zeigen kann: Nämlich die Primärfarben an den Ecken des Dreiecks, falls diese wirklich spektralrein³ sind. Alle Randpunkte des Dreiecks weisen zwar die größte Sättigung auf, die für den Bildschirm möglich ist, die Spektralfarbe des gleichen Farbtones ist aber noch stärker gesättigt. Am deutlichsten fällt das vielleicht am Cyan (Blaugrün) auf, das auch am Rand des Dreiecks doch recht blaß aussieht. Das spektrale, voll gesättigte Cyan wäre im Farbdreieck auf dem vom Unbuntpunkt ausgehenden Strahl anzuordnen, der die Mitte der linken Dreiecksseite schneidet, aber irgendwo *außerhalb* des Dreiecks. Nun gibt es für die Punkte dort außen auch noch Koordinaten, aber die scheinen zunächst keinen Sinn zu machen, weil der r -Wert negativ ist, und eine negative Helligkeit unseres roten Primärlichtes kann man nicht einstellen. Aber es geht anders herum: Man könnte dem spektralen Cyan rotes Primärlicht $(r,0,0)$ zumischen, bis die Mischfarbe auf den Rand des Dreiecks fällt. Dann hätte man die Gleichung $\text{Cyan} + (r,0,0) = (b,g,0)$ oder $\text{Cyan} = (-r,b,g)$.

Das bedeutet also: Obwohl man Cyan mit unseren Primärlichtanteilen nicht ermitteln kann, ist es trotzdem möglich, Cyan unter Verwendung negativer Farbkordinaten in unserem System zu *lokalisieren*. Das geht nicht nur mit Cyan, sondern mit jedem beliebigen Anteil des Spektrums; dabei ergibt sich für das kontinuierli-

³ Betrachtet man die entsprechenden Stellen des Bildschirmes durch ein Taschenspektroskop, so sieht man für die rote Farbe in der Tat eine scharfe Spektrallinie, für die grüne und die blaue jedoch etwas breitere Bänder; diese Farben sind also nur mit guter Näherung, aber nicht streng gesättigt. Möglicherweise gibt es Unterschiede, die durch den Hersteller bedingt sind.

che Spektrum ein hufeisenförmiger Linienzug, der außerhalb des Dreiecks verläuft und mit dem Dreieck nur die drei Punkte für die Primärlichtanteile Rot, Grün und Blau gemeinsam hat. Zwischen Rot und Grün schmiegt sich das Hufeisen ziemlich eng an die Dreiecksseite an, aber die Seite zwischen Blau und Grün wird doch in weitem Bogen umfahren. Alles, was innerhalb des Linienzuges, aber außerhalb des Dreiecks liegt, gehört zu Farben, die in dieser Welt, aber eben nicht auf dem Computer vorkommen, weil sie durch die drei Primärlichtanteile nicht dargestellt werden können. Eine Verbesserung könnte nur durch Hinzunahme weiterer spektraler Primärlichtanteile erreicht werden.

Die Farbmetrik, also jenes Teilgebiet der Farbenlehre, das sich zur Aufgabe macht, Farben durch Messung exakt und objektiv festzulegen, bedient sich ebenfalls der additiven Mischung von drei Primärlichtanteilen Rot, Grün und Blau, die allerdings definierte Wellenlängen und Intensität haben müssen. Die genau zu messenden Intensitätsverhältnisse bei der Mischung dienen - ähnlich wie die Helligkeiten r , g , b beim Computer - als Farbkordinaten. Wegen der Einzelheiten verweisen wir auf die Fachliteratur, z.B. [2] oder [3]. Dort findet man auch Bilder von der DIN-Farbnormtafel, deren Zusammenhang mit dem Farbdreieck erklärt wird.

4 Ergänzungen zur Physiologie der Farbwahrnehmung

Ein tieferes Verständnis des Graßmannschen Satzes und anderer interessanter Erfahrungen, die man beim Experimentieren mit farbigen Lichtquellen machen kann, setzt Kenntnisse über die Entstehung der Farbwahrnehmung voraus, vor allem die Kenntnis der heute allgemein akzeptierten Dreifarben Theorie von Young und Helmholtz, nach der die Farbempfindung auf den Erregungszustand besonderer Rezeptoren auf der Netzhaut zurückgeht. Von diesen Rezeptoren (den sog. "Zapfen") gibt es auf der Netzhaut drei unterschiedliche Arten, die sich in ihrer spektralen Empfindlichkeit unterscheiden. Die Theorie kann mit Hilfe eines Computermodells (Programm FWÄHR2.EXE) verständlich gemacht werden. Genaueres zu dem Modell findet man in einem Beitrag [7] in diesem Buch. Das Modell ist geeignet, interessante physiologische Phänomene zur Farbwahrnehmung verständlich zu machen, z.B. die schon von Goethe beschriebenen farbigen Schatten und die negativen Nachbilder, die ihre Ursache in einer sog. "Umstimmung" des Auges haben:

Drückt man z.B. auf den Knopf "Rot" des Modells, so erscheint die relative Empfindlichkeit für die rotempfindlichen Zapfen auf halbe Werte reduziert. Etwas derartiges kann unserem visuellen System auch geschehen, z.B. wenn man längere Zeit "rotlastiges" Licht einwirken läßt. Das geschieht z.B. so: Man beleuchtet einen weißen Schirm mit einer starken Halogenlampe und außerdem noch mit rotem Licht, das man mit einem Overheadprojektor mit Rotfilter über der Schreibfläche darüber projiziert. Wenn die Halogenlampe genügen stark ist, wird der Schirm nach einiger Zeit weiß erscheinen: Das Auge hat sich an das etwas andersartige weiße Licht gewöhnt, indem es den Rotanteil weniger stark gewichtet.

Hält man nun in einigem Abstand vor den Schirm die Hand, so entstehen zwei Schatten. In dem einen fehlt das Licht der Halogenlampe, er wird nur vom Overheadprojektor beleuchtet und erscheint daher rot, was nicht überrascht. Die Überraschung bringt der Schatten, in welchem nur das weiße Licht der Halogenlampe zu sehen ist. Es erscheint keineswegs weiß, sondern lindgrün. Das Phänomen läßt sich mit dem Computermodell simulieren: Man stellt das Maximum der Glocke in die Mitte des sichtbaren Bereichs und stellt die Halbwertsbreite maximal. Dann ergibt sich Weiß. Bei Reduktion der Empfindlichkeit für die roten Zapfen wird aus dem Weiß ein blasses Grün.

Ähnlich lassen sich die negativen Nachbilder verstehen, die man wie folgt demonstrieren kann: Man projiziert mit dem Overheadprojektor eine dunkle Schablone, aus der das Verkehrszeichen "Einbahnstraße" ausgeschnitten ist, hinterlegt mit *grüner* Folie. Nachdem die Zuschauer das Bild ca. 1 Minute fixiert haben - das Auge sollte dabei wirklich auf einen festen Punkt in der Mitte des Bildes fixiert bleiben - nimmt man die Schablone plötzlich weg, so daß die Projektionsfläche weiß wird. Die Zuschauer sehen aber auf der weißen Fläche das bekannte Einfahrtverbot in der komplementären Farbe Rot.

5 Versuche zur subtraktiven Farbmischung

Ebenso wie der additiven Mischung begegnen wir auch der subtraktiven in verschiedenen Formen und bei vielen Gelegenheiten: Z.B., wenn wir durch eine Sonnenbrille eine blumenübersäte Wiese anschauen, oder wenn bei einer Theatervorstellung Personen und Gegenstände mit farbigem Licht beleuchtet werden, oder wenn wir bunte Glasscheiben übereinander legen um durchzusehen, oder wenn wir farbige Flüssigkeiten mischen, usw. Immer wird dabei Licht beim Durchgang durch ein Medium oder auch bei der Reflexion an einer Oberfläche in der Weise verändert, daß es in bestimmten Spektralbereichen mehr geschwächt wird als in anderen. Dem ursprünglich einfallenden Licht werden dabei Anteile *weggenommen*, deshalb hat sich der Ausdruck *subtraktive* Mischung durchgesetzt. Am einfachsten läßt sich die subtraktive Mischung mit Farbfiltern demonstrieren, die man übereinander auf den Projektor legt. Z.B. läßt ein magentafarbenes Filter vom weißen Licht (fast) nur Blau und Rot durch indem es die anderen Farbanteile bevorzugt absorbiert, ein Cyanfilter läßt dagegen Blau und Grün durch, was man symbolisch so ausdrücken könnte:

$$\text{Magenta} = \text{Blau} + \text{Rot} \quad \text{Cyan} = \text{Blau} + \text{Grün}$$

Legt man das Cyanfilter aufs Magentafilter, so versperrt es dem Rotanteil den Weg, während der Blauanteil beide Filter durchsetzt. So betrachtet, scheint die Bezeichnung "subtraktive Farbmischung" gut gewählt. Legt man die Filter aber in umgekehrter Reihenfolge auf, so ist das Ergebnis ebenfalls Blau, und es paßt nicht ganz mit unseren Vorstellungen vom Subtrahieren zusammen, wenn Magenta - Cyan dasselbe gibt, wie Cyan - Magenta. Auch was zu beobachten ist, wenn man Cyan subtraktiv mit sich selbst mischt, reimt sich nicht mit der Subtraktion.

In der Tat wäre die Bezeichnung *multiplikative* Mischung treffender als subtraktive. Das zeigt das Computerprogramm SUBMI.EXE. Das Programm simuliert, was geschieht, wenn 4 farbige Filter nacheinander von (eingangs) weißem Licht durchsetzt werden (s. Abb. 4). Jedes dieser Filter kann in seiner Durchlässigkeit (Transmission) in drei Bereichen (blau, grün, rot) definiert werden (Einschreiben der durchgelassenen Prozentsätze und Betätigen der Eingabetasten). Das Programm "errechnet" dann aus den Helligkeiten des einfallenden Lichtes r_e, g_e, b_e und den eingegebenen Prozentzahlen für die Transmissionen die Helligkeiten r_d, g_d, b_d für das durchgelassene Licht, z.B. $r_d = 0,6r_e$ für eine Transmission von 60% im Roten. In dem weißen Fenster in Abb. 4 rechts oben kann man dann ablesen, wieviel Prozent des einfallenden Lichtes in den Bereichen blau, grün und rot nach dem Passieren der 4 Filter vorhanden sind. Die Figur darunter zeigt, welche Farbe das anfangs weiße Licht jeweils nach dem Passieren eines Filters annimmt. Für das in Abb. 4 gezeigte Beispiel ist der durchgelassene Rotanteil beim ersten und zweiten Filter 100%, beim dritten und vierten 50% bzw. 90%, woraus sich erklärt, daß im insgesamt durchgelassenen Licht 45% des ursprünglichen Rotanteils zu finden sind.

Die subtraktive Mischung ist also einfach zu verstehen; dennoch sind die Ergebnisse wesentlich komplizierter und weniger voraussagbar als bei der additiven. Das hängt damit zusammen, daß bei der subtraktiven Mischung der einfache Satz

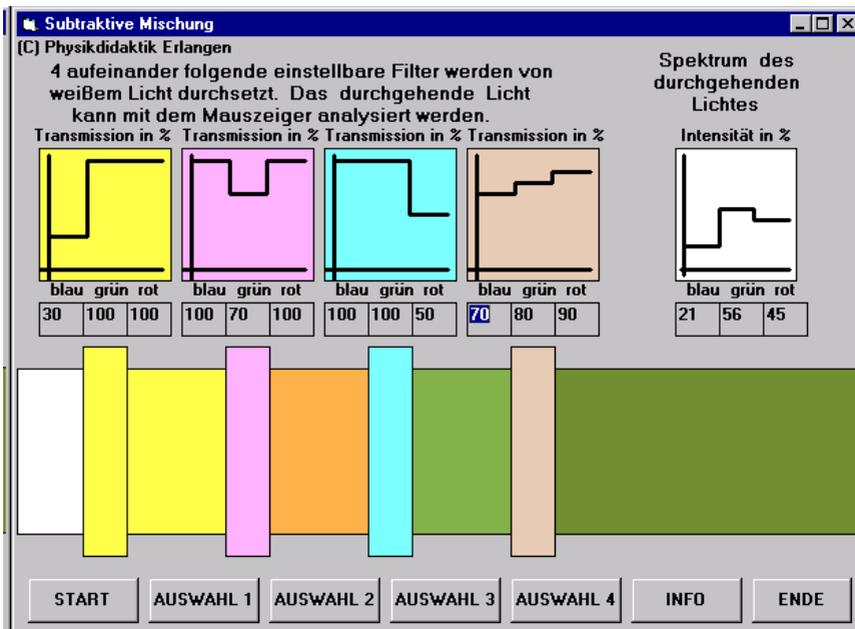


Abb. 5: Modell zur subtraktiven Mischung

von Graßmann über Metamere (vgl. Abschnitt 3) nicht gilt; mit anderen Worten: metamere (d.h. gleich aussehende) Farben können bei subtraktiver Mischung zu verschiedenen Ergebnissen führen. Ein einfaches Beispiel ist bereits der im Abschnitt 3 beschriebene Versuch mit der durch Kochsalz gefärbten Flamme und dem Gelbfilter-Licht. Bringt man in diese metameren Lichter einen roten oder grünen Karton, so wirkt er im Gelbfilterlicht wieder rot bzw. grün, weil das Gelbfilter normalerweise auch rot und grün durchläßt (beide Farben addieren sich ja zu Gelb). Das intensive Na-Licht jedoch enthält kein Rot oder Grün, deshalb kann es von dem Karton auch nicht reflektiert werden. Das Ergebnis der subtraktiven Mischung zweier Farben kann also durch bloßes Ansehen der Farben nicht vorausgesagt werden; eine sichere Voraussage ist nur möglich, wenn man die spektrale Zusammensetzung des einfallenden Lichtes und die Transmissionen (bzw. Remissionen) des an der Mischung beteiligten Körpers kennt. Dieser Sachverhalt ist für die Praxis wichtig, er sollte vor allem beim Kauf farbiger Textilien bei Kunstlicht beachtet werden. Das Kunstlicht könnte zum Tageslicht metamer sein, also den Eindruck von Tageslicht machen; dennoch kann der Stoff bei echtem Tageslicht besehen anders wirken.

Wichtig ist die subtraktive Mischung z.B. für den Farbdruck mit Tintenstrahl- und Laserdruckern und für die Farbphotographie. Die dabei benutzten Primärfarben sind Cyan, Magenta und Gelb. Im Farbdreieck des Abschnittes 3 liegen diese Farben jeweils auf den Mitten der drei Seiten des Dreiecks. Wie wir eben festgestellt haben, genügt es aber nicht, diese PrimärfarbfILTER durch ihr Aussehen zu beschreiben, es müssen vielmehr ihre Transmissionen festgelegt werden. Die entsprechenden Farbfilter können für die verschiedenen Spektralbereiche grob durch Tabelle 1 charakterisiert werden

Daraus kann leicht entnommen werden welche Farbe sich ergibt, wenn man zwei der Farben übereinanderdruckt, z. B. Cyan und "Gelb". Das Cyan läßt vom weißen Licht nur Blau und Grün durch, das "Gelb" davon wiederum nur Grün. Druckt man Magenta und „Gelb“ übereinander, dann wird dem blauen, dem grünen und dem gelben Licht der Weg versperrt, nur das Rot kann passieren. Druckt man Cyan und Magenta übereinander so kann nur Blau durchkommen, und Schichten aller drei Farben übereinandergedruckt sollte schwarz ergeben. Wegen der Unvollkommenheit der Farbstoffe erhält man allerdings meist kein gutes Schwarz, so daß im Druck die "Farbe" schwarz eigens noch als vierte verwendet wird; man spricht deshalb auch vom Vierfarbendruck.

Daß sich mit den drei Primärfarben Cyan, Magenta und "Gelb" eine breite Palette von Farben kombinieren läßt, wenn sie in verschiedenen Sättigungsgraden zur Verfügung stehen, kann man mit Stufenfiltern zeigen: Legt man z.B. von einer nur schwach gesättigten gelben Folie zwei, drei oder noch mehr Stücke stufenartig gestaffelt übereinander, so ergibt sich der Farbton Gelb in verschiedenen Sättigungsgraden. Ebenso kann man mit schwach gesättigten cyanfarbenen und ma-

	Blau	Grün	Gelb	Rot
Cyan	1111111111	1111111111	0000000000	0000000000
Magenta	1111111111	0000000000	0000000000	1111111111
„Gelb“	0000000000	1111111111	1111111111	1111111111

Tabelle 1: Übersicht zur subtraktiven Farbmischung (111: läßt durch, 000: sperrt) gentafarbenen Folien verfahren. Wir haben uns auf diese Weise Stufenfilter mit 6 Sättigungsgraden für jede Grundfarbe und für Grau hergestellt. Legt man diese Stufenfilter auf dem Overheadprojektor gekreuzt übereinander, so ergibt sich eine große Vielfalt von Farbtönen.

Sehr interessant und aufschlußreich ist es, verschiedenfarbige, mit einem Tintenstrahldrucker gedruckte Flächen mit der Lupe zu betrachten. Um z.B. die Farbe Rosa zu erzeugen, muß der Drucker rote Farbtupfen (subtraktive Mischung von Magenta und Gelb) erzeugen, die verringerte Sättigung wird durch additive Mischung mit dem Weiß des Papiers zwischen den roten Tupfen erreicht. Der Tintenstrahldrucker verwendet also subtraktive und additive Mischung nebeneinander.

6 Hinweise zur Herstellung von Farbfiltern

Will man auf die von Lehmittelfirmen [6] vertriebenen Filter, die im Fall von Schülerexperimenten zu kostbar sind, verzichten, so besteht auch die Möglichkeit, selbst Filter herzustellen, was besonders reizvoll ist.

In Bastelgeschäften gibt es aufklebbare Farbfolien (Bucheinbandfolien) preisgünstig als Meterware in vielerlei Farben. Als Träger verwendet man OH-folien. Allerdings sind diese Folien - auf blasenfreies Aufkleben ist zu achten - nicht besonders klar, sie genügen aber, um das Wesentliche zu zeigen.

Einfacher ist es, wenn man sich die Farbfilter selbst herstellt. Eine Verfahren besteht darin, Gelatine einzufärben und auf einem geeigneten Träger (Glasplatte, Folie) in einer dünnen Schicht aufzubringen und zu trocknen.

Man benötigt neben der Gelatine noch die passende Farbtinte (Zeichenbedarfsgeschäfte). Zur Herstellung eines Filters werden zwei Blätter Gelatine in 50 cm³ heißem Wasser aufgelöst und so viel Tinte untergerührt, bis die gewünschte Farbdichte erreicht ist. Die Lösung gießt man auf eine Glasplatte der Größe DIN A4 aus, die genau waagrecht ausgerichtet ist. Es entsteht dann eine gleichmäßig dicke Gelatineschicht, die im Laufe eines Tages antrocknet, so daß man dann ein Filter der gewünschten Farbe erhält. Als Träger eignen sich auch Overheadfolien, die in der Handhabung praktischer sind. Man muß nur beachten, daß die Gelatineschicht beim Trocknen schrumpft und die Folie sich deswegen einrollt. Hier hilft eine dünnere Schicht, d.h. man verwendet nur ein halbes Blatt Gelatine für eine DIN A4 Folie. Vor dem Ausgießen muß die Folie auf einem glatten Tisch vollständig eben fixiert werden, was man durch "Ankleben" an die Unterlage mit Wasser am einfachsten erreicht. Die aufgegossene Gelatine darf höchstens hand-

warm sein, weil sich die Folie sonst wellt. Sehr schöne und klare Folien erhält man auch, wenn man eine so dicke starke Gelatineschicht auf die Folie bringt, daß man diese nach dem Trocknen abziehen kann. Solche Folien eignen sich z.B. zur Herstellung von Stufenfiltern.

Eine andere einfache Methode, um Farbfilter zu erhalten, besteht darin, daß man sie sich mit dem Farbdrucker ausdruckt.

7 Literatur und Bezugsquellen

- [1] Goethe, Johann Wolfgang von (Hrsg. Gerhard Ott u. Heinrich O. Proskauer): "Farbenlehre, Bd. 2", Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart, 3. Auflage 1984
- [2] Bergmann-Schäfer, "Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 3 Optik", Berlin 1978
- [3] Buchwald, E., "Fünf Kapitel Farbenlehre", Physik-Verlag Mosbach/Baden, 1955
- [4] Falk, David S., Brill, Dieter R., Stork, David G.: "Ein Blick ins Licht, Einblicke in die Natur des Lichts und des Sehens in Farbe und Fotografie", Basel 1990
- [5] Treitz, Norbert: "Farben", Klett Verlag, Stuttgart 1985
- [6] **Programme:** die genannten Programme werden gegen Einsendung eines Unkostenbeitrages von 5DM auf Diskette zugeschickt. Sie können aber auch übers Internet abgerufen werden unter:
<http://www.physik.uni-erlangen.de/didaktik/didaktik.html> ;
 Die Programme laufen unter Windows (ab Version 3.11); sie setzen eine Grafikkarte mit 24 bit Farbtiefe voraus.
Farbabbildungen: Diese sind unter der gleichen WWW-Adresse abrufbar. Wir schicken auf Anfrage gegen Erstattung der Unkosten auch entsprechende Farbdrucke auf Folie oder Papier zu. Die meisten sind bereits mit den Programmen generierbar.
Bezugsquelle: Didaktik der Physik, Universität Erlangen - Nürnberg, Staudtstraße 7, 91058 Erlangen
Farbfilter: z.B. Leybold Best.-Nr. 467 95 bzw. - 96
- [7] H. Dittmann und W.B. Schneider: "Farbige Interferenzerscheinungen - gedeutet mit einem Modell zur Farbwahrnehmung".
 In: Wege in der Physikdidaktik , Band 4 (vorliegendes Buch, S. 93)