

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

# BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

## Wege in der Physikdidaktik

Band 3

Rückblick und Perspektive

ISBN 3 - 7896 - 0513 - 1

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1993

### Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.  
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle  
genutzt werden. Auf der Homepage

[www.solstice.de](http://www.solstice.de)

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

## Solitäre Wellen – gestern und heute

### (Ein Beitrag zur fachdidaktischen Aufarbeitung aktueller Inhalte physikalischer Forschung anhand von Beispielen zur Einbindung solcher Inhalte in die universitäre Aus- und Weiterbildung von Physiklehrern)

*„...Ich beobachtete die Bewegung eines Kahnes, der von einem Paar Pferde schnell einen engen Kanal entlang gezogen wurde, als der Kahn plötzlich anhalt - nicht so die Wassermasse im Kanal, die er in Bewegung gesetzt hatte; diese sammelte sich um den Bug des Schiffes in einem Zustand heftiger Bewegung, ließ das Schiff dann plötzlich hinter sich und rollte mit großer Geschwindigkeit vorwärts, wobei sie die Form einer großen einzelnen Erhebung annahm, eines gerundeten glatten und wohldefinierten Wasserbuckels, welcher seinen Weg längs des Kanals scheinbar ohne Änderung der Form oder Verringerung der Geschwindigkeit fortsetzte. Ich folgte ihr zu Pferde und überholte sie, während sie immer noch mit etwa acht oder neun Meilen pro Stunde vorwärts rollte und ihre ursprüngliche Form, etwa 30 Fuß lang und ein bis eineinhalb Fuß hoch, beibehielt. Ihre Höhe nahm allmählich ab, und nach einer Verfolgung über 1 oder 2 Meilen verlor ich sie in den Windungen des Kanals. Dies war, im August 1834, mein erstes zufälliges Zusammentreffen mit diesem einzigartigen und schönen Phänomen...“*

(J. Scott Russel [1], Übersetzung s. [2])

## 1. Prolog

Während der letzten 25 Jahre hat die sog. "Nonlinear Science" (NLS) – im deutschen Sprachraum eher unter dem Synonym "Synergetik" geläufig und mitunter ungerechtfertigterweise auf den Terminus "nichtlineare Physik" reduziert – in nahezu alle wissenschaftlichen Disziplinen, insbesondere in die Natur- und Ingenieurwissenschaften sowie in die Mathematik aber auch in die Geisteswissenschaften Einlaß begehrt. Das Erscheinen des Begriffs NLS im wissenschaftlichen Sprachgebrauch markiert den Beginn einer neuen Ära naturwissenschaftlichen Denkens, die mit den Schlagworten *interdisziplinär* sowie *system- bzw. konzeptorientiert* charakterisiert werden kann. Mit einer unkommentierten Übersetzung des Begriffs Synergetik als *Lehre vom Zusammenwirken* gelingt es nur unzureichend, wesentliche dieser Denkart inhärente Merkmale zu erhellen. So ist die Funktionalität eines lebenden Organismus (Gesamtsystem) nicht durch eine zufällige Superposition der Eigenschaften aller seiner einzelnen Zellen (mögliche Untersysteme) modellierbar. – Vielmehr zeigt das Gesamtsystem neue Eigenschaften, die auf der Ebene der Untersysteme nicht existieren, die jedoch ohne Fremdeinwirkung von außen durch eine konstruktive Kooperation derselben erzeugt werden können.

Gedankengänge solchen Typs sowie darauf fußende Modellansätze waren auch unter Physikern bis Mitte dieses Jahrhunderts unüblich. Bis dahin stand jede theoretische Erweiterung des weitverzweigten Gebäudes der Physik unter dem Aspekt eines im weiteren

Sinne linearen Superpositionsprinzips: *Liegen zwei Ursachen  $a$  und  $b$  vor, die voneinander isoliert das Ereignis  $A$  bzw.  $B$  bewirken, so zeigt eine Kombination der beiden verursachenden Effekte  $a + b$  die Wirkung  $A + B$  bei rein linearer Wechselwirkung und  $A + B + \epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ) bei Anwesenheit einer Nichtlinearität. Weiter wird angenommen, daß  $\epsilon$  mit störungstheoretischen Methoden abschätzbar ist.* Als Folge führen **ähnliche Anfangsbedingungen zu ähnlichen Konsequenzen**, was ein (notwendiges) Charakteristikum sog. linearer Theorien ist. Beispiele für letztere sind die Maxwell'sche Elektrodynamik und die Quantenmechanik (in deren ursprünglicher Form, d.h. bei Erhaltung der Teilchenzahl). Phänomene wie Paar- oder Teilchenerzeugung sind auf der Basis einer rein linearen Theorie jedoch unmöglich. Natürlich wurde auch vor der NLS-Ära der Bedeutung der Nichtlinearitäten von den Baumeistern der theoretischen Physik Rechnung getragen, wie z.B. in der Hydrodynamik mit den Navier-Stokes-Gleichungen, der Gravitationstheorie oder in der Erweiterung der Wellenmechanik zur Quantenfeldtheorie, die die Wechselwirkung von Teilchen in Festkörpern und Atomkernen oder allgemein Quantenfeldern beschreibbar macht. Jedoch beeinflusste das Denken in linearen Kategorien die Lösungsstrategien. Die durch die Existenz der Nichtlinearitäten verursachten Effekte wurden meist nur durch Störungsrechnung nach den Grundlösungen der linearisierten Theorien behandelt (eine Ausnahme bildet die Gravitationstheorie), was erwiesenermaßen auch falsche Resultate lieferte, u.a. kann die Präsenz von Nichtlinearitäten zu qualitativ neuen Phänomenen führen, die nicht durch Störungstheorie konstruiert werden können. Eine nähere Diskussion dieser Problematik führt uns hier zu weit vom Thema. Stattdessen möchte ich mein Hauptanliegen verdeutlichen. Allerdings bin ich dazu auf Ihre Experimentierfreude angewiesen: Stellen Sie einen (frisch gespitzten) Bleistift vertikal mit der Spitze nach unten auf eine ebene und glatte Tischplatte und lassen ihn anschließend los, wobei Sie im Augenblick des Loslassens vermeiden sollten, auf das System Impuls zu übertragen! Wiederholen Sie das Experiment mehrmals! Das oben zitierte Superpositionsprinzip forderte nun, daß der Bleistift nach Abschluß jedes Einzelversuchs im wesentlichen an derselben Stelle auf dem Tisch ( $\epsilon$ -Umgebung) zu finden sein sollte, was Ihrem experimentellen Befund total zuwiderlaufen dürfte: **Kleinste Änderungen in den Anfangsbedingungen führen zu völlig verschiedenen Resultaten.** Ein solches Verhalten ist typisch für nichtlineare Systeme wie sie im Rahmen der NLS betrachtet werden.

Der Schritt von der linearen Physik, d.h. einer Modellierung physikalischer Phänomene aus der Sicht des linearen Superpositionsprinzips, zu einer nichtlinearen bzw. zur NLS ist durch das Auftreten dreier neuer fundamentaler Termini gekennzeichnet, den Paradigmen des 'Solitons' (1), des 'deterministischen Chaos' (2) und des 'Fraktals' (3). Die Reihung orientiert sich an der historischen Entwicklung und dokumentiert gleichzeitig die Dynamik in der physikalischen Forschung, d.h. die sich stetig wandelnden Schwerpunkte unserer physikalischen Naturbetrachtung und -beschreibung und damit implizit die Evolution des naturwissenschaftlichen Weltbildes. Während das zweite Paradigma im Rahmen der *Wege der Physikdidaktik* bereits angesprochen worden ist [3], konzentriert sich die vorliegende Abhandlung auf des erste Paradigma des genannten faszinierenden Tripels. Angestrebt wird, einen Einblick zu geben in typische Eigenschaften kontinuierlicher nichtlinearer Systeme. Dabei sollen insbesondere die Schlagworte *solitäre Welle* und *Soliton* geklärt sowie die Ausweitung dieser Begriffe bei der Beschreibung nichtlinearer Anregungen in konjugierten Polymeren erläutert werden. Wesentliche Charakteristika nichtlinearer Evolutionsgleichungen (Das sind Gleichungen, die bei gegebener Anfangsbedingung die Zeitentwicklung einer im einfachsten Fall reellen Funktion  $\phi$  der Zeit-  $t$  und der Ortsvariablen  $x$  beschreiben und

von der allgemeinen Form  $\phi_t$  oder  $\phi_{tt} = F(\phi, \phi_x, \dots)$  sind.) werden anhand von ausgewählten Demonstrations- bzw. Praktikumsexperimenten für Nichtexperten einsichtig und quasi mit Händen greifbar zu machen versucht. Aus der Sicht einer engagierten, Klafki nicht abgeneigten, verantwortungsbewußten Fachdidaktik ist es hochgradig unbefriedigend, wenn zukünftige Lehrer der Sekundarstufe I und II im Laufe ihrer Ausbildung keinerlei Einblick in die aktuelleren Entwicklungen auf dem Gebiet der Physik erhalten, aber gleichzeitig recht detailliert über physikalische Sachverhalte Bescheid wissen, die großteils bereits im letzten Jahrhundert bekannt waren. Es ist zu überlegen, wie vermieden werden kann, den Stoffkanon auf diese Pflichtthemen zu begrenzen, ohne die Lehramtskandidaten zusätzlich zu den regulären Kursvorlesungen in zeitaufwendige und die Bedürfnisse eines späteren Lehrers übersteigende Spezialvorlesungen zu zwingen und den ohnehin vollgepackten Stundenplan noch weiter zu belasten. Ein Ziel dieses Beitrags ist, eigene Lösungsversuche zu schildern, die den in der universitären Ausbildung von Physiklehrern Tätigen in dieser Richtung Anregungen geben mögen. Exemplarizität und weise Beschränkung auf das Notwendige lautet hier die Devise.

Abschnitt 2 informiert über die hydrodynamischen Wurzeln der Begriffe solitäre Welle und Soliton und stellt Experimente vor, die in Aus- und Weiterbildung Einsatz finden können. Im Rahmen der vorliegenden Einführung werden tiefere mathematische Hintergründe der Solitontheorie nicht erörtert. Nicht angesprochen werden als Folge theoretisch wichtige Themen, wie die Frage der vollständigen Integrierbarkeit nichtlinearer Systeme oder bekannte Lösungsmethoden wie die inverse Streutheorie und andere Objekte aus der mathematischen Trickkiste, die der mehr theoretisch orientierte Leser vielleicht erwarten mochte. Abschnitt 3 wird ein modernes Anwendungsbeispiel aus der Physik des Magmatransports vorstellen, das den Vorteil hat, experimentell auch als Praktikumsversuch im Klassenzimmer realisierbar zu sein. Die angesprochene Metamorphose des Begriffs Soliton wird in Abschnitt 4 an einem Beispiel für Nichtexperten verdeutlicht.

## 2. Solitäre Wasserwellen

Die historischen Wurzeln des Terminus solitäre Welle liegen in der Hydrodynamik. Der englische Schiffbauingenieur John Scott Russel dokumentierte im August 1834 als erster die damals erstaunliche Beobachtung einer Welle, die nicht "zerläuft", – aus moderner Sicht die Realisierung eines Solitons mittels eines Analogcomputers. Die Schilderung seiner Begegnung ist diesem Artikel als Motto vorangestellt. Dieses Erlebnis veranlaßte Russel zu eigenen Experimenten in einem Wellenkanal (vermutlich auch im Grand Union Canal). Die Profile nichtlinearer Wellen, die er dabei beobachtete, sind in Abb. 1 wiedergegeben.

Wir wollen Wellenerscheinungen allgemein als Störungen des Ruhezustandes eines Mediums auffassen. In der Regel verbindet der physikfreundliche Laie, der nur Schulphysik genossen hat, mit dem Begriff Welle die harmonische ebene  $\phi(x, t) = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - ut)$  mit Amplitude  $a$ , Wellenlänge  $\lambda$  und Ausbreitungsgeschwindigkeit  $u$ . Für einen Beobachter eines solchen periodischen Wellenzuges ändert sich die Form der Welle zeitlich nicht, wenn dieser sich mit Geschwindigkeit  $u$  in Ausbreitungsrichtung der Welle mitbewegt, z. B. auf ihr mitreitet. Offensichtlich gilt  $\phi(x, t) = \phi(z)$ ,  $z = x - ut$  (♣). Allgemein wird durch diese Bedingung die Klasse der *fortschreitenden Wellen* definiert. Die Wellen der Abb. 1a bis 1c sind sicherlich dieses Typs. Zusätzlich sind sie räumlich lokalisiert, d. h. die Limits  $z \rightarrow +\infty$  und  $z \rightarrow -\infty$  (♣♣) existieren. Sind die Bedingungen (♣) und (♣♣) gleichzeitig erfüllt, heißt ein Wellenfeld  $\phi(x, t)$  *solitär*.

Abb. 1e zeigt ein deutliches Aufsteilen und Überkippen (Brechen) der Welle, was durch die Anwesenheit nichtlinearer Terme in der das System beschreibenden Evolutionsgleichung erklärbar ist. Dieses Aufsteilen kompensiert die dispersiven Effekte, die ein Zerfließen "normaler" Wasserwellen verursachen. Genaue pflanzen sich die Komponenten verschiedener Wellenlänge eines Wellenpakets mit unterschiedlicher Geschwindigkeit fort, was auch in einer reibungsfreien Flüssigkeit zu einer Verteilung des Energieinhalts der Welle auf ein unendlich großes Gebiet und damit quasi zum Verschwinden der Welle führt. Wellenerscheinungen, bei denen sich die beiden gerade beschriebenen Effekte die Waage halten, besitzen im theoretischen Modell unendliche Lebensdauer. Die Balance ist jedoch sehr diffizil und hängt neben der Art des Mediums (d. i. im mathematischen Modell der Typ der hydrodynamischen Gleichungen) sowohl von der Form als auch der Größe der Störung (Wellenamplitude) ab. Wie von J.S. Russel nachgewiesen, können solch stabile Objekte in Kanälen geringer Tiefe erzeugt werden. Dabei fand er empirisch einen funktionalen Zusammenhang zwischen positiver Amplitude  $a$  (maximale Höhe der Welle über der Wasseroberfläche) und Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $u$  bei seiner glockenförmigen *great wave of translation*, der u. a. besagte, daß höhere solitäre Wellen (größeres  $a$ ) sich schneller fortbewegten (größeres  $u$ ) als niedrigere. Dieses für lineare Wellen ungültige Faktum läßt sich mit Hilfe der Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV-Gleichung), in dimensionsloser Form

$$\phi_t = 6\phi\phi_x - \phi_{xxx},$$

erklären, die ein halbes Jahrhundert später von Korteweg und de Vries für lange und mäßig hohe Flachwasserwellen hergeleitet wurde [4]. Der Term  $\phi_{xxx}$  zeichnet für die Dispersion, der Term  $\phi\phi_x$  für das erwähnte Aufsteilen verantwortlich. In der angeführten Form bewegt sich das Bezugssystem gleichförmig. (Nähere Einzelheiten über die Aktivitäten von Russel sind im Anhang von Ref. [5] zu finden.).

Entscheidende Fortschritte in der mathematischen Theorie der KdV-Gleichung und anderer nichtlinearer Systeme erfolgten erst ab Mitte der sechziger Jahre unseres Jahrhun-

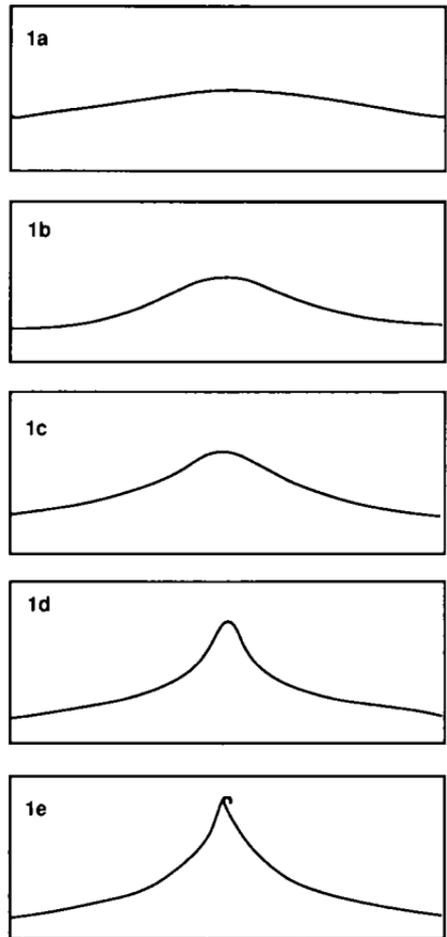


Abb. 1: Profile solitärer Wellen (nach J.S. Russel)

derts, nachdem das Interesse an nichtlinearen Systemen generell anfang der fünfziger Jahre durch das Fermi-Pasta-Ulam-Problem geweckt worden war [6]. Es wurde durch ein numerisches Experiment aufgeworfen, das Enrico Fermi, John Pasta und Stan Ulam mit Hilfe des MANIAK I (LANL) an einem eindimensionalen nichtlinearen Gitter durchführten, um die endliche Wärmeleitfähigkeit von Festkörpern zu studieren. Allgemein wurde im Rahmen der klassischen statistischen Mechanik erwartet, daß die Gegenwart selbst schwacher Nichtlinearitäten zu einer irreversiblen Gleichverteilung der Energie auf alle Freiheitsgrade führt. Statt des vorhergesagten ergodischen Verhaltens wurden jedoch nichtlineare Oszillationen gefunden, die als eine Verteilung der Energie auf benachbarte Harmonische der ursprünglich angeregten Frequenz angesehen werden können, und die unerwarteterweise das System periodisch quasi in seinen Anfangszustand überführten (Rekursionsphänomen). 1965 zeigten numerische Untersuchungen von Zabuski und Kruskal [7], daß solitäre Lösungen der KdV-Gleichung eine gewisse Stabilität gegenüber Kollisionen aufwiesen, d.h. Form und Geschwindigkeiten der Kollisionspartner blieben erhalten. Diese Eigenschaft erinnert an Teilchen, weshalb Zabuski und Kruskal für diesen Lösungstyp der KdV-Gleichung den Begriff *Soliton* prägten. Mittlerweile sind viele andere Solitonen tragende Systeme bekannt (s. z.B. Ref. [8]). Im weiteren werde ich folgende Definition des Begriffs Soliton benutzen: *Eine solitäre Welle  $\phi_S(x - ut)$ , die asymptotisch ihre Form und Geschwindigkeit nach einer Kollision mit einer anderen solitären Welle beibehält (bis auf eine eventuelle Phasenverschiebung)* (zur Warnung sei vermerkt, daß diese Definition in manchen nichtlinearen Systemen nicht hinreichend ist, um ein Soliton zu identifizieren), d.h. sei  $\phi(x, t)$  eine Lösung einer Wellengleichung, die für große negative Zeiten eine Überlagerung aus N einzelnen solitären Wellen  $\phi_{st}(\xi_j)$  darstellt,

$$\phi(x, t) \sim \sum_{j=1}^N \phi_{st}(\xi_j), \quad \text{für } t \rightarrow -\infty, \quad \xi_j = x - u_j t, \quad u_j = \text{const.},$$

dann heißen die solitären Wellen  $\phi_{st}$  Solitonen, falls sie bei der Wechselwirkung nur eine Phasenverschiebung erleiden, d.h. für große positive Zeiten gilt

$$\phi(x, t) \sim \sum_{j=1}^N \phi_{st}(\xi_j), \quad \text{für } t \rightarrow +\infty, \quad \xi_j = x - u_j t + \delta_j, \quad \delta_j = \text{const.}$$

Eine Lösung, die asymptotisch durch eine Überlagerung von einzelnen Solitonen dargestellt werden kann, nennen wir N-Soliton oder N-Solitonenlösung. In dieser Sprechweise wird im Motto dieser Abhandlung die experimentelle Realisierung der Einsolitonlösung der KdV-Gleichung beschrieben.

Um Studierenden die Möglichkeit zu geben, Solitonen *live* zu beobachten, haben wir in Bayreuth zwei Wellenkanäle aus Plexiglas gebaut [9], [10], [11]. Zum Start lassen wir nicht wie u.a. J.S. Russel einen Klotz ins Wasser fallen, sondern verwenden die Schiebertechnik der Ref.n [12], [13]. Abb. 2 zeigt mögliche Startbedingungen durch lokale Erhöhung des Wasserstandes entweder am Kopf (linke Abb.) oder in der Mitte (rechte Abb.) des Kanals. Dabei gibt  $h$  die Basiswasserhöhe im Kanal,  $A$  die Breite des durch den Schieber abgetrennten Segments und  $B$  den Wasserstand im Segment an. Bei der Anfangsbedingung der rechten Abb. laufen bei gleichzeitigem Öffnen der Schieber die Wellen spiegelsymmetrisch nach beiden Seiten, weshalb wir uns auf die Ausführung mit nur einem Schieber an Kopf- und Fußende beschränkt haben.

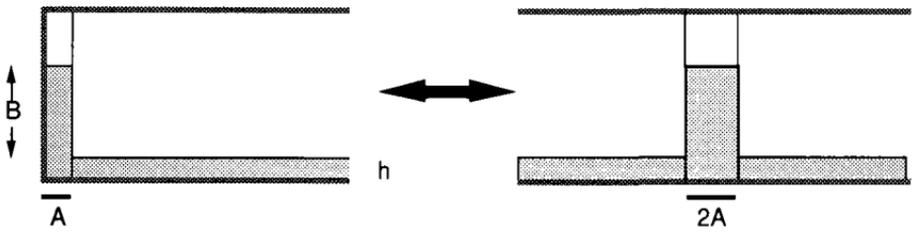


Abb. 2: Äquivalente Anfangsbedingungen zur Erzeugung solitärer Wellen

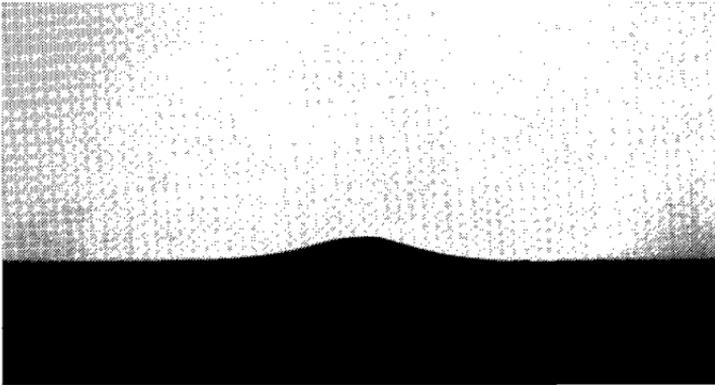


Abb. 3: Nach rechts laufendes Einsoliton in Kanal I, erzeugt bei einer Basiswasserhöhe von  $7\text{cm}$  mit  $A = 20\text{cm}$  und  $B = 5\text{cm}$ .

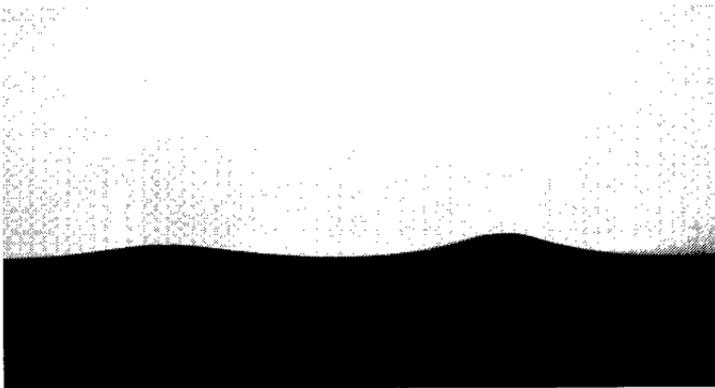


Abb. 4: Nach rechts laufendes Zweisoliton in Kanal I, erzeugt bei einer Basiswasserhöhe von  $7\text{cm}$  mit  $A = 50\text{cm}$  und  $B = 4\text{cm}$ .

Prinzipiell sind entweder Messungen zu fester Zeit  $t_0$  als Funktion des Ortes (I) oder an festem Ort  $x_0$  als Funktion der Zeit möglich (II). Bei Typ I wird mit Videokamera bei anschließender Digitalisierung der Videobilder oder mit einem Photoapparat ein Segment von Kanal I (6m lang, 40cm breit und 60cm hoch, in vier Segmente zerlegbar) aufgenommen, der auch zur direkten Demonstration im Hörsaal dient. Abb. 3 zeigt ein nach rechts laufendes Einsoliton ca. 3m (linkes Ende) vom Startpunkt entfernt, Abb. 4 ein nach rechts laufendes Zweisoliton an derselben Position. Es ist deutlich zu erkennen, daß die höhere solitäre Welle eines Multisolitons den bzw. hier der kleineren vorausleitet. Die Versuchsanordnung erlaubt sowohl Überholvorgänge als auch Kollisionen zu studieren. In Abb. 5 wird der Kollisionsvorgang zweier Einsolitonen anhand einer Folge von digitalisierten Videobildern gezeigt. Die einzelnen Aufnahmen haben einen zeitlichen Abstand von 1/25 Sekunden. Es ist deutlich zu erkennen, wie die beiden anfänglich wohl separierten Einzelsolitonen aufeinander zulaufen, sich gegenseitig durchdringen und nach der Wechselwirkung ihre ursprüngliche Gestalt bewahrt haben. Die allgegenwärtigen Reibungsverluste führen auch in diesem Kanal zu einer allmählichen Amplitudenabnahme der erzeugten solitären Wellen. Für Messungen vom Typ II wurde ein Detektorsystem gebaut, das erlaubt, über eine Brückenschaltung Wasserstandsschwankungen im mm-Bereich aufzulösen. Die Entwicklung erfolgte im Rahmen einer Zulassungsarbeit, weitere Einzelheiten, ein Plan der Detektorschaltung inklusive, sind in den

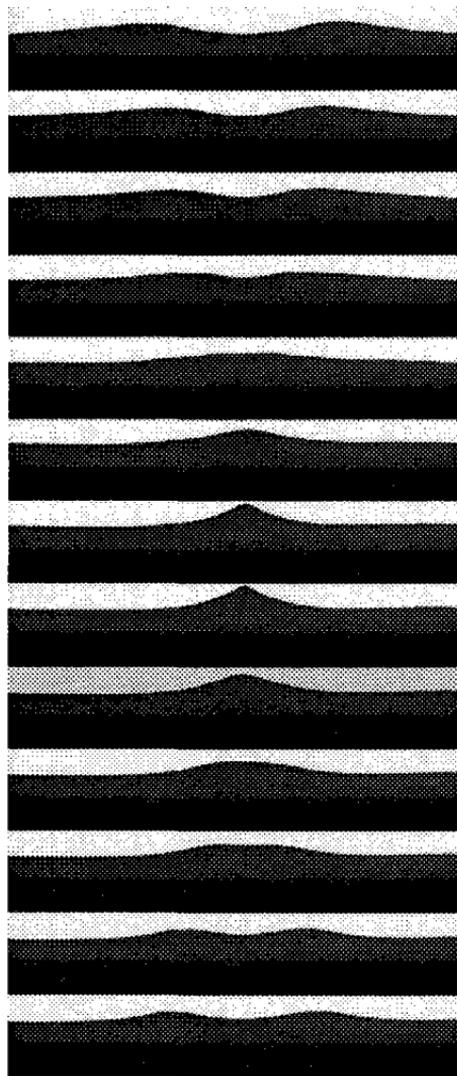


Abb. 5: Kollision zweier Einsolitonen, erzeugt bei einer Basiswasserhöhe von 6,8cm mit  $A = 20\text{cm}$  und  $B = 5,5\text{cm}$  (identisch für beide Solitonen)

Ref.n [9] und [10] zu finden. Zur Meßdatenerfassung selbst verwendeten wir einen Apple Macintosh IIcx mit einer 12 bit-Multifunktionskarte von National Instruments. Gemessen wurde an Kanal II (12m lang, ca. 10cm breit und ca. 17cm hoch, in 8 Segmente zerlegbar), der einen relativ kleinen Querschnitt besitzt und in der 6m-Version bei fachdidaktischen Übungen im Experimentieren für Lehramtskandidaten eingesetzt wird.

Im Laborsystem lautet die dimensionsbehaftete KdV-Gleichung für einen unendlich langen Kanal

$$\Phi_t + c_o \Phi_x + \frac{3c_o}{2h} \Phi \Phi_x + \frac{c_o h^2}{6} \Phi_{xxx} = 0$$

mit der charakteristischen Länge  $L = ((4h^3)/(3\Phi_o))^{1/2}$ , die Einsolitonenlösung gewinnt dann die analytische Form (z.B. [12])

$$\Phi(x, t) = \Phi_o \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - ct}{L}\right),$$

wobei  $c := c_o(1 + \Phi_o)/(2h)$  die Geschwindigkeit,  $\Phi_o$  die Amplitude und  $h$  die Basiswasserhöhe bezeichnen. Abb. 6 zeigt den Fit eines gemessenen Einsolitons durch die Einsolitonenlösung der KdV-Gleichung. Der dem Soliton nachfolgende Strahlungsschwanz – das Soliton ist von rechts nach links fortschreitend zu denken –, tritt bei allen Messungen auf und ist darauf zurückzuführen, daß die Messung nicht im Limes  $t \rightarrow +\infty$  durchgeführt werden kann, was nicht nur durch die endliche Länge des Kanals, sondern auch durch die Reibung bedingt ist. Beobachtet werden können bis zu 30 Reflexionen.

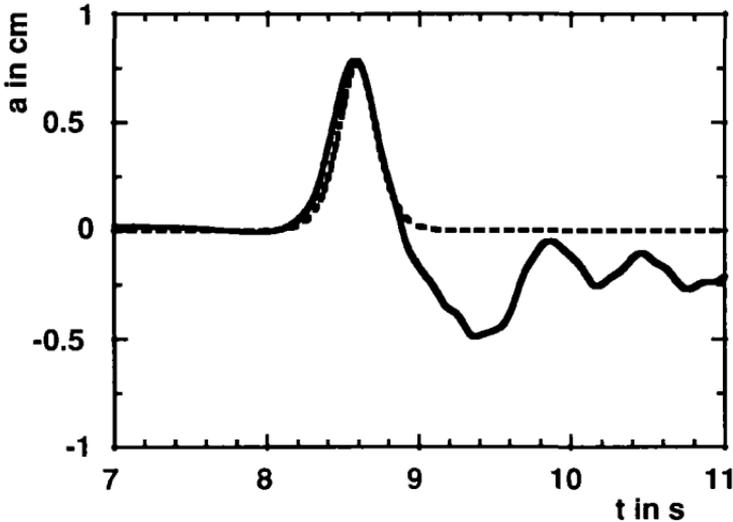


Abb. 6: Nach links laufendes Einsoliton in Kanal II (durchgezogen) und analytische Form der Einsolitonenlösung der KdV-Gleichung (gestrichelt).

Detektiert wurden  $N$ -Solitonen für  $N = 1, \dots, 5$ . Charakteristische Eigenschaften von KdV-Solitonen konnten nachgewiesen werden, Abhängigkeit der Phasen- resp. Gruppengeschwindigkeit von der Amplitude, Abhängigkeit der Form der erzeugten Mehrsolitonen von der Startbedingung, Auftreten einer räumlichen Separation der Maxima einer Solitonenengruppe (Mehrsoliton) als Funktion der Zeit (Abb.n 7 und 8 zeigen diese Separation am Beispiel eines 4-Solitons.), Formstabilität beim Überholvorgang, Existenz des Phasensprunges bei Kollision (Streuung) von Solitonen (s. Abb. 9).

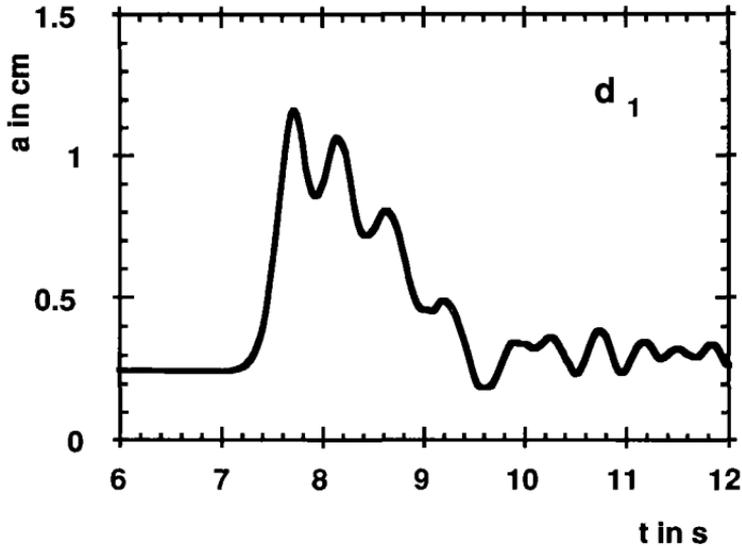


Abb. 7: Nach links laufendes 4-Soliton (Detektor I 3.2m vom Kopfende des Kanals II entfernt).

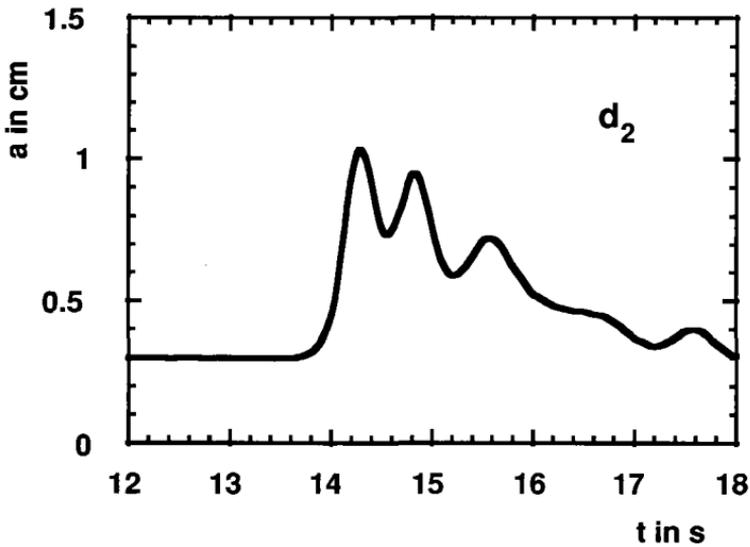


Abb. 8: Nach links laufendes 4-Soliton (Detektor II 8m vom Kopfende des Kanals II entfernt).

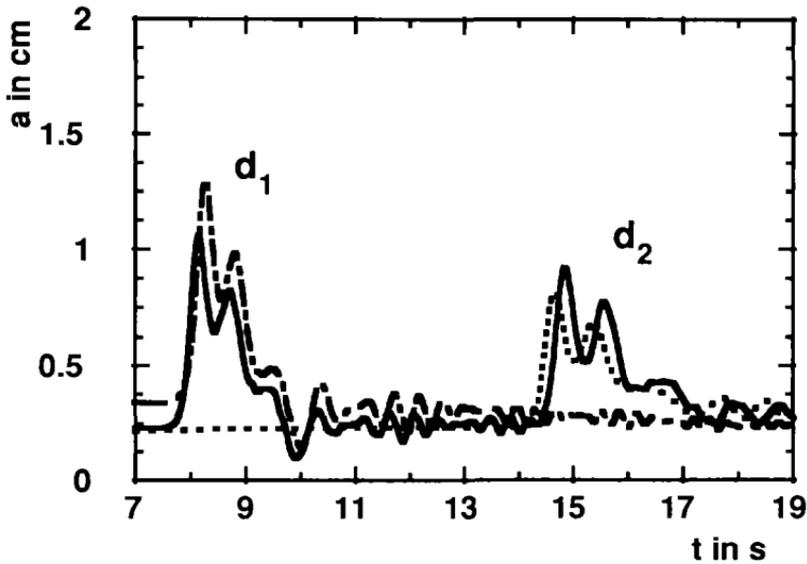


Abb. 9: Kollision zweier Zweisolitonen (Detektor I 3,6m, Detektor II 8,4m vom Kopfende entfernt) bei einer Basiswasserhöhe von 5cm,  $A = 30\text{cm}$  und  $B = 2\text{cm}$ .

Die Phasenverschiebung bei der Streuung von Solitonen läßt sich aus den Meßdaten eines Kollisionsvorganges bestimmen, wenn die Geschwindigkeit einer der beteiligten Partner vor der Wechselwirkung aus den Daten berechnet und die daraus extrapolierte Position nach der Kollision mit der tatsächlichen verglichen wird. Weitaus anschaulicher ist es jedoch, ohne Rechnung drei unterschiedliche Versuche miteinander zu vergleichen: einmal die Registrierung der an der Kollision beteiligten Multisolitonen an zwei Meßstellen ( $d_1$  und  $d_2$ ), zum anderen die Detektion eines einzelnen keiner Streuung unterworfenen Multisolitons an denselben Meßstellen. Damit erhält man in einer Graphik vier Multisolitonenpeaks (vgl. Abb. 9). Die durchgezogenen Linien in Abb. 9 repräsentieren die von den Detektoren I und II registrierten Daten eines Zweisolitons, das zwischen den Meßstellen mit einem zweiten Soliton kollidiert ist. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist der Output (Strahlungsanteil) von Detektor I für  $t > 13\text{s}$  und der von Detektor 2 für  $t < 13\text{s}$  nicht dargestellt. Die strichpunktiierte ( $d_1$ ) und die gestrichelte Kurve ( $d_2$ ) zeigen dasselbe nicht gestreute Zweisoliton beim Passieren der beiden Registrierstellen. Die Verschiebung im Ort, d.h. der Phasensprung, ist an der Meßstelle  $d_2$  deutlich zu erkennen.

Aus Raumgründen soll auf weitere Ausführungen verzichtet werden; für weitere Details wird auf Ref.n [9]-[10] verwiesen. Stattdessen möchte ich eine neuere Anwendung der Theorie solitärer Wellen, ein Modell für Magmatransport, vorstellen.

### 3. Solitäre Wellen auf einem aufsteigenden Sirupstrahl

Das Problem der Bewegung von Magma in teilweise geschmolzenem Gestein unter dem Einfluß der Schwerkraft im Erdmantel, kann als Transport einer viskosen Flüssigkeit (Magma) durch eine poröse Matrix angesehen werden. Numerische Untersuchungen eines diesen Vorgang beschreibenden mathematischen Modells ergaben die Stabilität solitärer Lösungen bei Kollisionen. Die in Ref. [14] hergeleiteten Differentialgleichungen enthalten das *Gesetz von Darcy* (*der Fluß einer Flüssigkeit durch eine durchlässige Matrix ist proportional zum Druckgradienten in der Flüssigkeit*) als Grenzfall, wobei ein barozentrisches

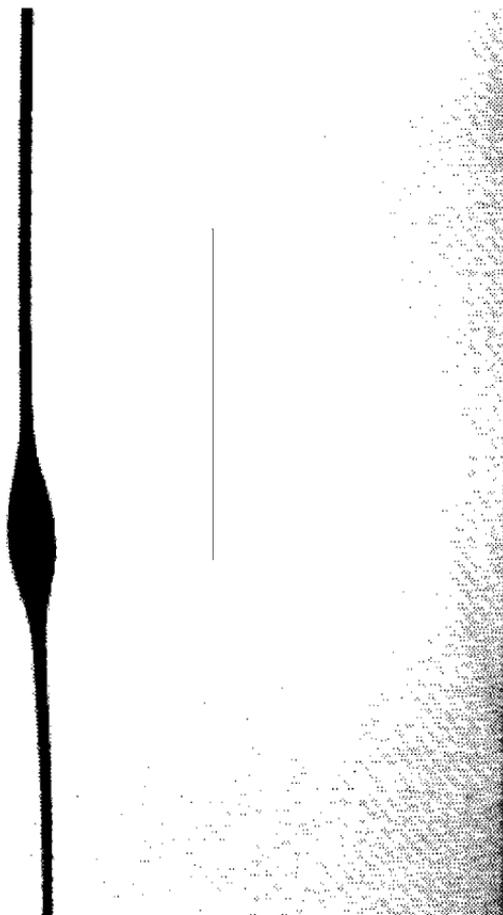


Abb. 10: Sirupsoliton

Bezugssystem benutzt wird, d.h. in einem Einheitsvolumen werden die Geschwindigkeit der aufsteigenden Flüssigkeitssäule und der porösen Matrix als vom Betrage gleich, aber entgegengesetzt gerichtet angenommen. Laborexperimente zu dieser Fragestellung registrieren das durch die Auftriebskraft verursachte Aufsteigen einer Flüssigkeit A innerhalb einer zweiten dichteren und zäheren Flüssigkeit B [15], [16], [17]; es bildet sich eine viskose verformbare Röhre mit variablem Durchmesser. Wird die durch die Wirkung der Auftriebskraft aufsteigende Flüssigkeit A mit konstanter Rate zugeführt, zeigt das System einen gleichmäßigen Poiseuille-Fluß. Der Response des Systems auf Fluktuationen in der Zufußrate von Flüssigkeit A besteht in der Bildung lokaler Maxima im Radius der Röhre,

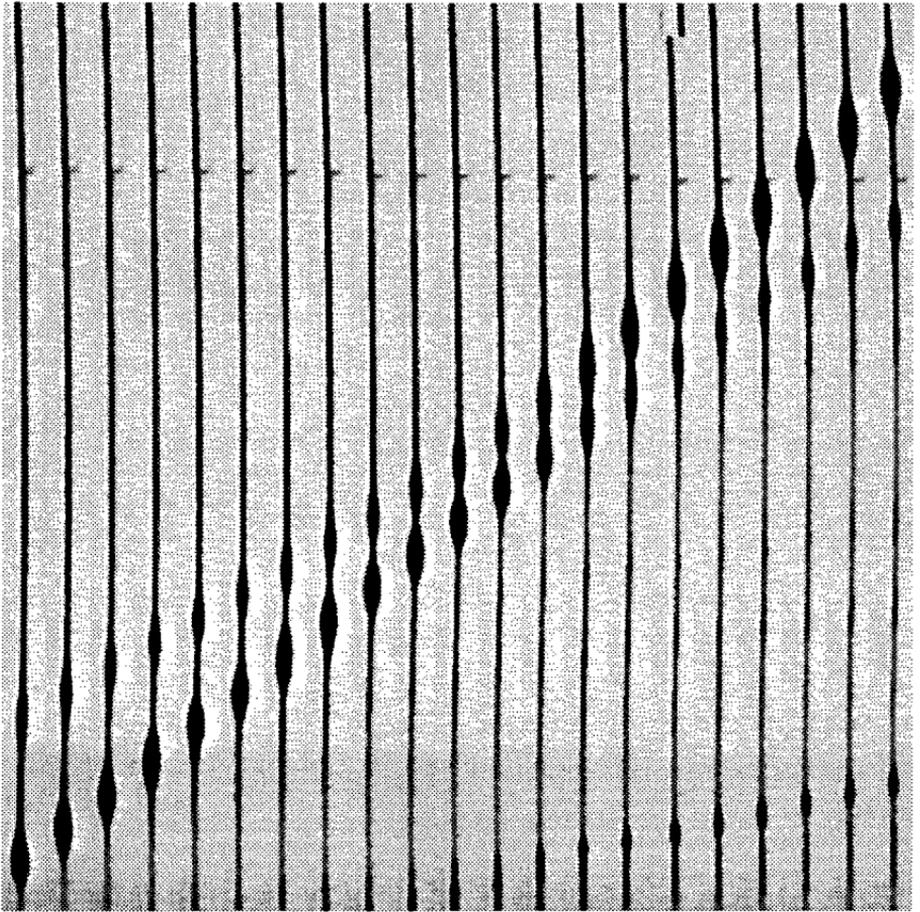


Abb. 11: Überholvorgang

die als solitäre Wellen aufsteigen. Die Wellen mit größerer Amplitude (d.h. größerem Radius) holen kleinere ein und kollidieren schließlich mit diesen. In guter Näherung besitzen beide Wellen nach der Kollision ihre ursprüngliche Form und Amplitude [15]-[17]. Wir haben die Experimente mit einfachen Mitteln nachgebaut (für weitere Einzelheiten s. die Ref.n [18] und [19]). Als Flüssigkeiten haben wir Glukosesirup aus Eigenherstellung verwendet. Die Zuflußrate ist durch Ändern des hydrostatischen Drucks an der Einlaßdüse geregelt worden - aus Kostengründen nicht mittels einer Dosierpumpe, sondern durch Anheben des Vorratsgefäßes des injizierten Sirups B. Abb. 10 zeigt ein digitalisiertes Videobild einer aufgrund der Auftriebskraft aufsteigenden solitären Welle, im weiteren kurz mit Sirupsoliton bezeichnet. Wesentliche Eigenschaften solch solitärer Magmonen wurden untersucht, u.a. Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von der Amplitude, Formstabilität beim Überholvorgang, Existenz des Phasensprunges bei Kollision (Überholvorgang) von solitären Wellen, Abhängigkeit der Form der erzeugten solitären Wellen von der Startbedingung, Auftreten einer räumlichen Separation der Maxima eines Zweisolitons als Funktion der Zeit, Analyse der Geschwindigkeitsverteilung innerhalb eines Sirupsolitons [19]. Abb. 11 dokumentiert einen Überholvorgang. Deutlich ist der Phasensprung zu erkennen, den die Sirupsolitonen bei der Kollision erleiden. Es hat sich jedoch gezeigt, daß zumindest größere Sirupsolitonen keine Solitonen im strengen Sinne sind [19].

#### 4. Nichtlineare Anregungen in konjugierten Polymeren

Ein Gebiet, wo der Begriff des Solitons zum Schlagwort geworden ist, genauer nur noch als Bezeichnung für eine spezielle Art nichtlinearer Anregungen dient, ist die Physik konjugierter Polymere und anderer quasiaendimensionaler Systeme. Polyazetylen ( $CH_x$ ) ist diejenige Substanz, bei deren theoretischer Beschreibung eine Begriffswandlung des Wortes Soliton erfolgt ist. Kunststoffe sind in der Regel gute Isolatoren, z.B. ist die spezifische Leitfähigkeit bei Polyester kleiner als  $10^{-12} \Omega^{-1} cm^{-1}$ .  $CH_x$  zählt zur Klasse der organischen Leiter, da es nach Dotieren mit Jod eine relativ hohe Leitfähigkeit (Naarmann- $CH_x$   $100000 \Omega^{-1} cm^{-1}$ ) aufweist (elektronisch selbstleitendes Polymer). Für Demonstrationsversuche zur Leitfähigkeit organischer Substanzen ist jedoch Polypyrrol wegen seiner Stabilität in freier Atmosphäre zu empfehlen. Die chemische Struktur von  $CH_x$  ist in Abb. 12 wiedergegeben.

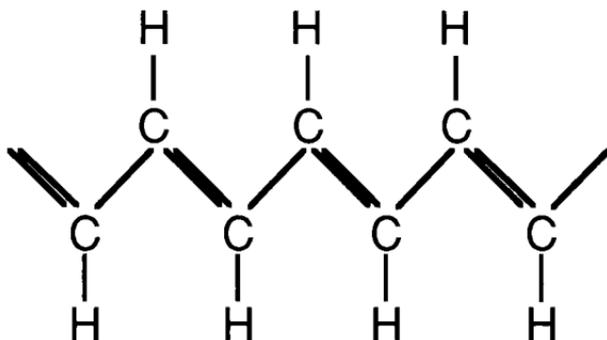


Abb. 12: Strukturformel von trans-Polyazetylen

Zur Vereinfachung wird häufig nur das Kohlenstoff-Backbone gezeichnet. (Abb. 13). Die Delokalisierung der  $\pi$ -Orbitale entlang der Kette wird durch die abwechselnde Folge von Einfach- und Doppelbindungen (Bindungsalternierung) symbolisiert.

### A-Phase



### B-Phase



Abb. 13: Zwei energetisch entartete Strukturen des Grundzustandes von  $CH_x$

Die beiden Phasen A und B der Abb. 13 sind energetisch entartet, weshalb in der realen Substanz eine Mischung beider Arten wahrscheinlich erscheint [20]. Den Übergang von der A- zur B-Phase, einen sog. Bindungsalternierungsdefekt, zeigt Abb. 14. Wegen der Ladungsneutralität der Kette besitzt die dargestellte nichtlineare Anregung Spin  $1/2$  und Ladung  $0$ , weshalb sie als neutrales Soliton bezeichnet wird.

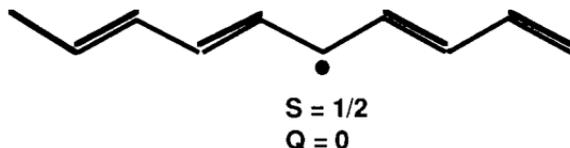


Abb. 14: Neutrales Soliton in  $CH_x$

## 5. Danksagung

Ich danke dem Hochschulrechenzentrum der Universität Bayreuth für die Bereitstellung von Hardware zur Digitalisierung von Videoaufnahmen, insbesondere Herrn Bernhard L. Winkler für die Einführung in die Bildverarbeitung und seine sonstige Hilfe. Verwendet wurde ein Indigo Videoboard 2.0 #DS-IVID-2.0. Den Lehrstühlen für Theoretische Physik bin ich für die Nutzung der Indigo Workstations (Silicon Graphics) zur Weiterverarbeitung der Imagefiles dankbar. Darüber hinaus möchte ich den zentralen Werkstätten der UBT meinen Dank aussprechen, die den manchmal ausgefallenen Aufträgen der Bayreuther Physikdidaktik stets aufgeschlossen gegenüberstehen.

## 6. Literatur

- [1] Russel, J. S. (1844), *Report on Waves* in: Rept. Fourteenth Meeting of the British Association of Science, 311-390 (John Murray, London)
- [2] Kraus, K. (1979), Solitäre Wasserwellen und andere Solitonen, *Physik in unserer Zeit*, **6**, 166-75
- [3] Weber-Milbrodt, S. M. (1991) in: Schneider W. B. (Hrsg.), *Wege in der Physikdidaktik*, Band 2, Anregungen für Unterricht und Lehre, 197-208 (Palm & Enke, Erlangen)
- [4] Korteweg, D. J. and de Vries, G. (1895), On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, **39**, 422-43
- [5] Bullough, R. K. and Caudrey, P. J. (eds.) (1980), *Solitons*, (Springer, Berlin)
- [6] Collected papers of E. Fermi, **2** p. 977 (Chicago 1965)
- [7] Zabuski, N. J. and Kruskal, M. D. (1965), *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 240
- [8] Scott, A. C., Chu, F. Y. and McLaughlin, W. (1973), The Soliton: A New Concept in Applied Science, *Proc. IEEE.*, **61**, 1443-1483
- [9] Weber, Sigrid M. und Ertel, Nicole, in Vorbereitung
- [10] Weber, Sigrid M. (1993) in: *Fachausschuß Didaktik der Physik, Vorträge, Physikertagung 1993 Esslingen*, wird veröffentlicht
- [11] Ertel, Nicole und Weber, Sigrid M. (1993) in: *Fachausschuß Didaktik der Physik, Vorträge, Physikertagung 1993 Esslingen*, wird veröffentlicht
- [12] Bettini, A., Minelli, T. A. and Pascoli, D. (1983), Solitons in undergraduate laboratory, *Am. J. Phys.* **51**, 977-84
- [13] Olsen, M., Smith, H. and Scott, A.C. (1984), Solitons in a wave tank, *Am. J. Phys.* **52**, 826-30
- [14] Scott, D.R. and Stevenson, D.J. (1984), Magma Solitons, *Geophys. Res. Lett.* **11**, 1161-64
- [15] Scott, D.R., Stevenson, D.J. and Whitehead, J.A. (1986), Observations of solitary waves in a viscously deformable pipe, *Nature* **319**, 759-61
- [16] Olson P. and Christensen, U. (1986), Solitary Wave Propagation in a Fluid Conduit Within a Viscous Matrix, *J. Geophys. Res.* **91**, 6367-74
- [17] Whitehead, J.A. (1987), A laboratory demonstration of solitons using a vertical watery conduit in syrup, *Am. J. Phys.* **55**, 998-1003
- [18] Röhlich, Thomas und Weber, Sigrid M. (1993) in: *Fachausschuß Didaktik der Physik, Vorträge, Physikertagung 1993 Esslingen*, wird veröffentlicht
- [19] Weber, Sigrid M. und Röhlich, Thomas, in Vorbereitung
- [20] Su, W.P., Schrieffer, J.R. and Heeger, A.J. (1980), *Phys. Rev.* **B22**, 2099-111