

Jürgen Becker, Matthias Hegner, Werner B. Schneider
Eine Spielzeugautobahn im Physikunterricht

Es wird ein im Mechanikunterricht der 11. Klasse erprobter Einsatz einer Spielzeugautorennbahn (DARDA-Bahn) beschrieben. Hierbei wird insbesondere auf die Kräfte (Beschleunigungen) in einer senkrecht aufgestellten Schleifenbahn mit konstantem oder veränderlichem Krümmungsradius und auf den Einfluß der Reibung bei der Schleifenfahrt eingegangen. Zur genaueren Diskussion des Einflusses der Reibung und des Krümmungsradius dient eine ebenso beschriebene Computersimulation zur Schleifenfahrt. Der Vorteil einer Spielzeugbahn gegenüber den üblichen, sterilen Experimentierfahrbahnen macht sich einmal in dem Motivationsvorsprung, der durch das Spielzeug gegeben ist, bemerkbar und durch die Flexibilität bei der Gestaltung unterschiedlichster Bahnformen. Dabei ergibt sich spielerisch auch das Bedürfnis, nach Anwendungen wie z. B. die Gestaltung von Autobahnauffahrten oder von Achterbahnschleifen, bei denen die Ein- und Ausfahrt ohne Sprung der Radialbeschleunigung erfolgen muß, zu suchen. In beiden Fällen können anhand der Versuche mit der Spielzeugbahn Lösungen (Klothoidenform der Bahn) gefunden und näher untersucht werden.

1. Vorbemerkung

Spielzeug kann eine Bereicherung für den Physikunterricht darstellen. Ein für den Mechanikunterricht in der 11. Klasse besonders geeignetes „Spielzeug“ ist nach unserer Unterrichtserfahrung die sogenannte DARDA-Bahn [1], eine Autorennbahn im Maßstab 1:60, die sich einmal durch die vielfältigen Gestaltungsmöglichkeiten der „Rennbahn“ und zum anderen durch den raffiniert konstruierten Motor der Autos auszeichnet. Die DARDA-Bahn hat seit ihrem Erscheinen im Jahr 1975 große Verbreitung gefunden, was u. a. auf die besonderen Eigenschaften des DARDA-Motors zurückzuführen ist. Es handelt sich um einen Federmotor mit einem trickreichen Aufziehmechanismus. Der Motor wird durch einfaches Vor- und Zurückschieben bei leichtem Druck auf den hinteren Teil des Autos aufgezogen. (Eine detaillierte Beschreibung des Motors findet man in [2].)

Für den Einsatz im Mechanikunterricht der 11. Klasse sprechen u. a. folgende Argumente:

- Bei einem Spielzeug sind die Schüler stärker motiviert. Sie können ihre eigene Spielerfahrung in den Unterricht einbringen.
- Die phantastischen Fahrleistungen der DARDA-Autos sind besonders überraschend. Würde man die Fahrleistung eines dieser Autos auf reale Verhältnisse umrechnen, so ergäbe sich eine Maximalgeschwindigkeit von ca. 1000 km/h und eine Beschleunigung von 0 auf 100 km/h in 0,1 s.
- Die Bahnelemente sind aus flexiblem Kunststoff hergestellt. Es lassen sich sowohl in der Ebene als auch im Raum interessante Bahnkonfigurationen und Schleifen mit konstantem oder veränderlichem Krümmungsradius einfach verwirklichen. Die Bahnelemente und die Spielzeugautos sind relativ preiswert, so daß ihre Anschaffung als Demonstrations- oder Schülerübungsgerät leicht möglich ist.

Auch uns Lehrern hat der Einsatz der Bahn im Unterricht viel Spaß gemacht, was sicher zum Unterrichtserfolg beigetragen hat.

Von den vielfältigen Einsatzmöglichkeiten der DARDA-Bahn, die wir in unserem Unterricht erprobt haben, wird exemplarisch über folgende Aspekte berichtet:

- Kräfte bei einer Schleifenfahrt;
- Einfluß der Reibung auf die Schleifenfahrt;
- Computersimulation zur Schleifenfahrt unter Berücksichtigung der Reibung;
- Radialbeschleunigung bei einer Schleife mit konstantem oder veränderlichem Krümmungsradius (Klothoidenform einer Achterbahnschleife).

2. Schleifenbahn mit konstantem Krümmungsradius

2.1 Beschreibung des Versuchsaufbaus

Die von uns aus DARDA-Bahnelementen hierzu aufgebaute Schleifenbahn ist in Abbildung 1 dargestellt. Es empfiehlt sich, die Startrampe (Bahnabschnitt AC) auf eine

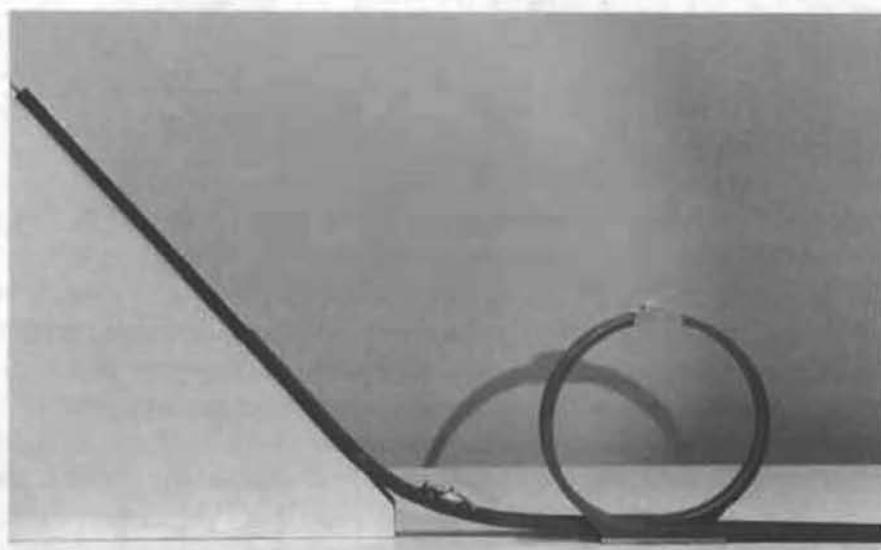
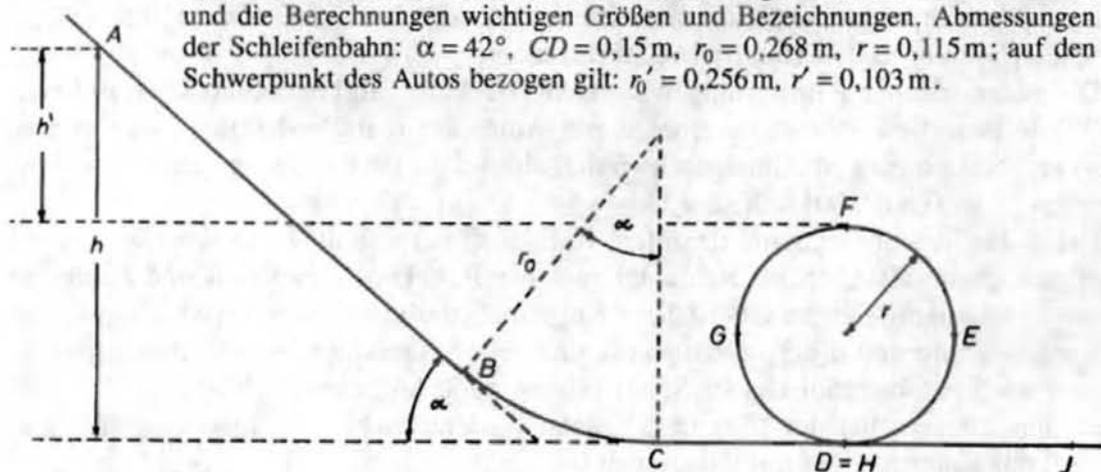


Abb. 1 a: Fotografie der aus DARDA-Elementen aufgebauten Schleifenbahn.

Abb. 1 b: Skizze der Schleifenbahn mit der Angabe der für die Diskussion und die Berechnungen wichtigen Größen und Bezeichnungen. Abmessungen der Schleifenbahn: $\alpha = 42^\circ$, $CD = 0,15 \text{ m}$, $r_0 = 0,268 \text{ m}$, $r = 0,115 \text{ m}$; auf den Schwerpunkt des Autos bezogen gilt: $r_0' = 0,256 \text{ m}$, $r' = 0,103 \text{ m}$.



festen Holzunterlage zu montieren, um so zu gewährleisten, daß ein Neuaufbau schnell erfolgen kann und daß die Bahndaten dabei konstant bleiben.

Die Schleifenfahrt ist durch folgende Bahnabschnitte gekennzeichnet: vom Startpunkt A durchfährt der Wagen zunächst eine schiefe Ebene mit dem Steigungswinkel α bis zum Punkt B. Von B bis C ist die Bahn gekrümmt mit dem Radius r_0 und geht in C in einen horizontal verlaufenden Abschnitt über, der bis zur Schleifeneinfahrt D reicht. Ähnlich wie im Abschnitt BC durchfährt der Wagen in der Schleife eine Bahn mit konstantem Radius – jedoch jetzt einen vollständigen Kreis – bis er wieder zum Punkt D (H) kommt, um dann auf einem horizontal verlaufenden Abschnitt bis J auszulaufen. Man erwartet, daß dort, wo der Krümmungsradius von einem unendlich großen auf einen konstanten, endlichen Wert springt, physikalisch interessante Beobachtungen möglich sind, wie in Kap. 3.3.2 und 4. gezeigt werden wird. Für unsere Untersuchungen verwendeten wir zunächst ein DARDA-Auto mit ausgebautem Motor, um die Reibungsverluste klein zu halten. Bei diesem Auto liegt der Schwerpunkt 1,2 cm oberhalb der Fahrbahn, so daß in den Rechnungen die effektiven Bahnradien $r'_0 = 0,256$ m und $r' = 0,103$ m einzusetzen sind.

2.2 Qualitative Beschreibung der Kräfte in der Schleifenbahn

Für das Verständnis der physikalischen Vorgänge bei einer Schleifenfahrt ist vor allem die Beantwortung der Frage nach der notwendigen Anfangsenergie und dem Ursprung der Zentripetalkraft in der Schleife besonders wichtig.

In schulüblichen Darstellungen wird die Frage nach der Erzeugung der Zentripetalkraft oft durch physikalisch unmotivierte Sprünge zwischen verschiedenen Bezugssystemen nur unvollständig oder nicht einsichtig beantwortet. Aus diesem Grund gehen wir hierauf etwas genauer ein.

Der Wagen verursacht bei der Schleifenfahrt durch seine Massenträgheit und aufgrund der Normalkomponente seiner Gewichtskraft eine elastische Verformung der Fahrbahn (s. Abb. 2 und Abschnitt 3.1). Der ruhende Beobachter interpretiert die entsprechende Rückstellkraft des Bahnmaterials, die im folgenden mit „Bahnkraft“ bezeichnet wird, als die auf den Wagen wirkende Zentripetalkraft.

Zum vollständigen Durchfahren der Schleife ist ein Mindestwert für die Anfangsenergie notwendig. Diese ist dadurch gegeben, daß das Auto im Scheitelpunkt der Bahn gerade noch nicht den Fahrbahnkontakt verliert. Setzt man einen Start mit $v_0 = 0$ voraus, so wird die Anfangsenergie allein durch die Starthöhe bestimmt. Mit „Schleifenbahn-Bedingung“ ist im folgenden die Einstellung gekennzeichnet, bei der der Start mit $v_0 = 0$ erfolgt und die Starthöhe so gewählt wird, daß bei dieser Anfangsenergie das Auto im Scheitelpunkt eine Mindestgeschwindigkeit besitzt, bei der das Auto gerade den Fahrbahnkontakt nicht verliert.

Für die zunächst reibungsfrei angenommene Bewegung kann man die zur Erfüllung der Schleifenbahn-Bedingung notwendige Mindeststarthöhe und Mindestgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Schleifenbahnradius angeben. Die Schleifenbahn-Bedingung ist dann erfüllt, wenn die Bahnkraft im Scheitelpunkt F gerade den Wert Null annimmt und die Gewichtskraft allein die notwendige Zentripetalkraft liefert. Hierfür gilt:

$$mg = mv_F^2/r' \quad (1)$$

Der Energieerhaltungssatz für dieses System lautet:

$$\frac{1}{2} m v_F^2 + m g 2 r' = m g h \quad (2)$$

Aus beiden Beziehungen lassen sich die Mindestgeschwindigkeit v_{\min} im Punkt F und die Mindeststarthöhe h_{\min} berechnen:

$$v_{\min} = \sqrt{g r'} \text{ bzw. } h_{\min} = 2,5 r' \quad (3)$$

Für die in Abbildung 1 gezeigte Schleifenbahnanordnung beträgt die Mindestgeschwindigkeit $v_{\min} = 1,0 \text{ m/s}$ und die Mindeststarthöhe $h_{\min} = 25,8 \text{ cm}$ (ohne Reibung).

3. Simulation der Schleifenfahrt auf einem Computer

Durch die mathematische Beschreibung der Schleifenfahrt lassen sich Vorhersagen zur Bewegung in der Schleife auch unter Einbeziehung der Reibung treffen. Die Einbeziehung der Reibung führt jedoch zu analytisch nicht geschlossen lösbaren Ausdrücken, da die Bahnkraft in der Schleife nicht konstant ist. Sie hängt von der dort jeweils vorliegenden Geschwindigkeit und Normalkraft ab. Um dennoch Vorhersagen zu treffen und um auch den Einfluß der Reibung genauer zu untersuchen, haben wir die Schleifenfahrt nach Abbildung 1 auf einem Rechner simuliert. Für die Simulation wurde ein DARDA-Auto mit ausgebautem Motor vorausgesetzt, für das in guter Näherung angenommen werden kann, daß der Luftwiderstand und die Rotationsenergie der Räder vernachlässigbar sind und daß der Rollreibungskoeffizient längs der Bahn konstant ist. Die Starthöhe ist jeweils so gewählt, daß die Schleifenbahn-Bedingung erfüllt ist.

3.1 Kräftezerlegung an einer beliebigen Stelle der Schleifenbahn

Die Simulation der Fahrt durch die kreisförmige Schleife wird durch die Verwendung von Polarkoordinaten besonders einfach. Für den Winkel φ , der den Ort des Autos in der Schleife angibt, wurde folgende, in Abbildung 2 erläuterte Zuordnung zu den eingezeichneten Bahnpunkten getroffen:

$$\varphi_D = -90^\circ, \varphi_E = 0^\circ, \varphi_F = 90^\circ, \varphi_G = 180^\circ, \varphi_H = 270^\circ \quad (4)$$

Für diese Wahl des Nullpunktes und der Zählrichtung ergibt sich für die Bahnkraft F_B in der Schleife:

$$F_B = F_{ZP} - F_N = m \left(\frac{v^2}{r'} - g \sin \varphi \right) \quad (5)$$

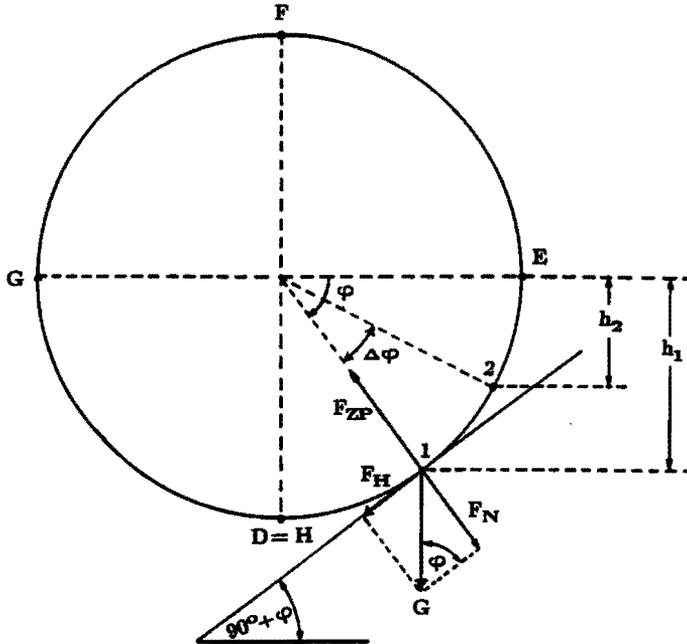


Abb. 2: Skizze zur Veranschaulichung der in der Simulation verwendeten Größen. F_H : Hangabtriebskraft, F_N : Normalkraft, G : Gewichtskraft F_G .
Es gilt: $h_1 = r \sin \varphi$ und $h_2 = r \sin(\varphi + \Delta\varphi)$; Nullpunkt von φ gemäß Gl. (4); h_1 und h_2 sind auf die Horizontale GE bezogen.

3.2 Beschreibung des Algorithmus für die Simulation

Der Simulation liegt folgende Idee zugrunde. Die Zeit, während der die Bewegung abläuft, zerlegt man in einzelne Intervalle Δt und berechnet hierfür die charakteristischen Größen der Bewegung, die dann als Anfangswerte für das darauffolgende Intervall dienen. Der Zeitschritt Δt muß so klein gewählt werden, daß im Intervall die Krümmung näherungsweise konstant ist und daß der im Intervall zurückgelegte Weg Δs bzw. der überstrichene Winkel $\Delta\varphi$ durch $\Delta s = v_1 \Delta t$ und $\Delta\varphi = (v_1/r') \Delta t$ in guter Näherung gelten, wobei v_1 die Geschwindigkeit bei Eintritt in das Intervall darstellt. Für $\Delta t = 0,001$ s sind diese Annahmen gut erfüllt. Innerhalb des Zeitintervalls wird dann die Reibungsarbeit W_R verrichtet:

$$W_R = F_R \Delta s = \mu F_B \Delta s = \mu F_B r' \Delta\varphi \quad (6)$$

und man erhält am Ende des Zeitintervalls die kinetische Energie:

$$W_{\text{kin}2} = W_{\text{kin}1} - W_R - W_{\text{hub}}; \quad \text{mit } W_{\text{hub}} = m g (h_2 - h_1) \quad (7)$$

Daraus läßt sich die Geschwindigkeit v_2 am Ende des betrachteten Zeitintervalls Δt berechnen, mit der im darauffolgenden Zeitintervall die Rechnung wieder begonnen wird. Mit der im jeweiligen Intervall erreichten Geschwindigkeit, dem zugehörigen

Winkel φ und der Bahnkraft läßt sich mit Glg. (5) die Radialbeschleunigung in dem Intervall angeben:

$$a(\varphi) = F_B/m = v^2/r' - g \sin \varphi \quad (8)$$

Insgesamt erhält man mit diesem Iterationsverfahren nach dem Durchlaufen sämtlicher Zeitintervalle die für die Bewegung charakteristischen Größen als Funktion des Ortes und der Zeit. Als Anfangsbedingung wurde festgelegt, daß der Wagen gerade die Schleifenbahnbedingung erfüllt (Glg. (1)).

Der letzte noch unbekannt Parameter in der Rechnung ist der Wert des Reibungskoeffizienten μ auf ebener Strecke. Dieser wurde durch einen Ausrollversuch experimentell bestimmt. Hierzu wird das Auto aus der Höhe h auf einer Bahn wie in Abbildung 1 – allerdings ohne Schleife – zunächst beschleunigt und auf dem horizontalen Abschnitt rollt es bis zum Stehen aus. Aus der Höhe h und der horizontal verlaufenden Wegstrecke kann dann der Reibungskoeffizient bestimmt werden. Ähnlich geht man auch in der Automobilindustrie vor, um den Reibungskoeffizienten bei einem realen Auto zu bestimmen. Wir erhielten bei einer Starthöhe $h = 12$ cm einen mittleren Ausrollweg von 240 cm, was einem Wert $\mu = 0,05$ entspricht.

3.3 Ergebnisse der Computersimulation

3.3.1 Zum Reibungskoeffizienten

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten μ besteht darin, seinen Wert bei der Simulation so lange zu variieren, bis die Ergebnisse der Simulation mit realen Meßdaten für andere charakteristische Größen der Bewegung in der Schleife am besten übereinstimmen. Hierfür ist die leicht meßbare Geschwindigkeit bei der Scheifenein- bzw. Schleifenausfahrt (Punkt D und H in Abbildung 2) gut geeignet. Der so erhaltene Wert $\mu = 0,055$ stimmt innerhalb des Meßfehlers gut mit dem auf direktem Weg bestimmten überein, was auf die Konsistenz des Verfahrens hinweist.

3.3.2 Zu den Komponenten in Bewegungsrichtung

In Abbildung 3 und Tabelle 1 sind das t - v -Diagramm und die Geschwindigkeitswerte für die Punkte der Bahn gemäß Abbildung 1 angegeben, wie sie aus der Simulation erhalten wurden.

Besonders interessant sind die Werte für die Punkte B, C und D, da hier – wie vorher erwähnt – abrupt zusätzlich die Zentripetalkraft wirksam wird. Zunächst erwartet man, daß hiervon die Komponenten in Bewegungsrichtung nicht betroffen sind. Es zeigt sich, daß diese Vermutung nur bedingt richtig ist. Im einzelnen ergeben sich folgende Fakten:

- Die längs der Bahn auftretende maximale Geschwindigkeit ist im Fall mit Reibung größer als im Fall ohne Reibung. Dies liegt daran, daß zur Einhaltung der Schleifenbahn-Bedingung im Fall mit Reibung aus einer größeren Höhe gestartet werden muß als im Fall ohne Reibung.

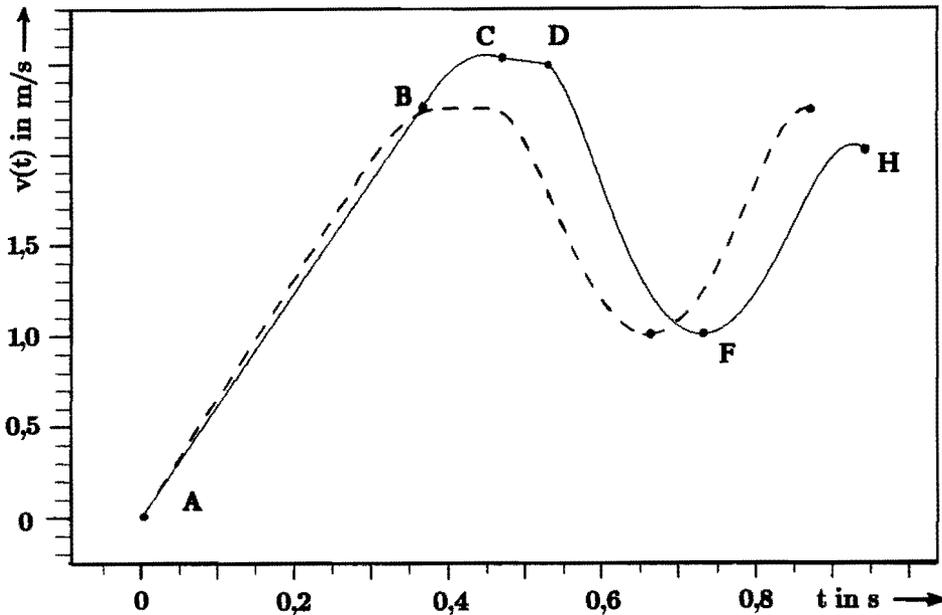


Abb. 3: t - v -Diagramm als Ergebnis der Computersimulation für die in Abb.1 gezeigte Bahn (Punkt A bis H). ---: $v(t)$ ohne Reibung (Start bei A; $h_0 = 0,258\text{m}$); —: $v(t)$ mit Reibung (Start bei A, $h_0 = 0,378\text{m}$); Start jeweils für $t = 0$.

	t in s	v in m/s
A	0,00	0,00
B	0,39	2,38
C	0,47	2,52
D	0,53	2,49
E	0,60	1,79
F	0,73	1,01
H	0,95	2,02

Starthöhe: $h_0 = 0,378\text{m}$

Tab. 1: Zeit und Geschwindigkeit für die Bahnpunkte in Abbildung 1.

- Für die Beschleunigung auf der Startrampe im Bahnabschnitt AB gilt:

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = 6,1\text{m/s}^2; \text{ (mit } g = 9,80\text{m/s}^2) \tag{9}$$

- Im gekrümmten Bahnabschnitt BC nimmt die Beschleunigung bis auf den Wert Null ab. Die Ursache hierfür ist einmal die mit dem kleiner werdenden Neigungswinkel α einhergehende Abnahme der Hangabtriebskraft. Zum anderen nimmt die Reibungskraft in diesem Bahnabschnitt zu, da aufgrund der Krümmung die Bahnkraft größer wird. Für die Beschleunigung im Punkt B bzw. C erhält man:

$$a_{B,C} = g \sin \alpha - \mu (g \cos \alpha + v_{B,C}^2 / r_0') \tag{10}$$

mit $\alpha = 42^\circ$ bzw. $\alpha = 0$ ist dann: $a_B = 5,0\text{m/s}^2$ bzw. $a_C = -1,8\text{m/s}^2$.

- Das Diagramm in Abbildung 3 bestätigt, daß bereits vor Erreichen des Punktes C die Reibungskraft größer als die Hangabtriebskraft wird, wodurch bereits eine Verzögerung eintritt. Ferner stellt man fest, daß ohne Einfluß der Reibung die Beschleunigung bis zum Punkt C stets positiv ist.
- Die Bewegung im horizontal verlaufenden Bahnabschnitt CD ist konstant verzögert mit $a = -\mu g = -0,54 \text{ m/s}^2$. Unter Vernachlässigung der Reibung würde sich das Auto mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.
- Beim Passieren des Punktes D (Einfahrt in die Schleife) nimmt die Geschwindigkeit stark ab. Für die Verzögerung a_D im Punkt D gilt mit Tab. 1:

$$a_D = -\mu(g + v_D^2/r') = -3,8 \text{ m/s}^2 \quad (11)$$

- Der Verlauf der Beschleunigung in Bewegungsrichtung weist in den Punkten B, C und D Unstetigkeitsstellen auf, wie aus dem Vergleich der jeweiligen Beschleunigung direkt vor und hinter dem betreffenden Punkt ersichtlich ist:

$$\begin{aligned} \Delta a_B &= g \sin \alpha - \mu(g \cos \alpha + v_B^2/r'_0) - (g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha) \\ &= -\mu v_B^2/r'_0 = -1,2 \text{ m/s}^2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta a_C = -\mu v_C^2/r'_0 = -1,4 \text{ m/s}^2 \quad \text{und} \quad (13)$$

$$\Delta a_D = -\mu(g + v_D^2/r') - (-\mu g) = -\mu v_D^2/r' = -3,3 \text{ m/s}^2 \quad (14)$$

Die Unstetigkeitsstellen treten auf, weil an diesen Stellen ein Sprung von einem unendlichen Krümmungsradius auf einen endlichen, konstanten Wert – oder umgekehrt – vorhanden ist. Zunächst überrascht dieses Ergebnis, da in Bewegungsrichtung der Einfluß der Radialkraft nicht bemerkbar sein sollte. Allerdings zeigen Glg. (12) – (13), daß der Sprung nur dann auftritt und sichtbar wird, wenn die Reibung berücksichtigt wird und μ genügend groß ist.

- Im Punkt F ergibt sich die in Kap. 2.2. berechnete Geschwindigkeit von $v_F = 1,0 \text{ m/s}$.
- Für die Energie in den einzelnen Punkten erhält man für das DARDA-Auto (ohne Motor, $m = 31 \text{ g}$) folgende Werte:

P:	E_{ges}	ΔE
A:	$E = m g h_0 = 114,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$	
D:	$E = 0,5 m v_D^2 = 96,1 \cdot 10^{-3} \text{ J}$	$\Delta E = 18,7 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
F:	$E = m g 2 r' + 0,5 m v_F^2 = 78,4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$	$\Delta E = 17,7 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
H:	$E = 0,5 m v_H^2 = 63,2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$	$\Delta E = 15,2 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

Tab. 2: E_{ges} : Gesamtenergie des DARDA-Autos in den angegebenen Bahnpunkten P.
 ΔE : durch Reibung bedingter Energieverlust.

Für einen vollständigen Bahndurchlauf ergibt sich für den durch Reibung entstandenen Energieverlust $\Delta E_{\text{ges}} = 51,6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$; dies sind 45 % der Anfangsenergie.

4. Zur Radialbeschleunigung in der Schleifenbahn

4.1 bei konstantem Krümmungsradius

Im Rahmen der Simulation ist die Berechnung der Radialbeschleunigung $a_r(\varphi)$ von besonderem Interesse, da jeder die Ergebnisse als Fahrgast in einer Achterbahn durch sein eigenes Fahrerlebnis „überprüfen“ kann. In Abbildung 4 ist der so erhaltene Verlauf für $a(\varphi)$ bereits umgerechnet in $a_r(s)$ angegeben, wobei s den jeweils auf den Startpunkt bezogenen, zurückgelegten Weg darstellt. Wir wählten diese Darstellung, da sie für die folgende Betrachtungen günstiger ist.

Der in Abbildung 4 dargestellte, berechnete Verlauf der Radialbeschleunigung zeigt in den Bahnpunkten D und H ein unstetiges Verhalten, das sowohl im Fall mit Reibung als auch im Fall ohne Reibung vorhanden ist, jedoch unterschiedlich stark auftritt. Im Punkt D springt die Radialbeschleunigung von g auf $7g$ und in H von $5g$ zurück auf g . Zwischen den Punkten D und H ändert sich $a_r(s)$ dagegen stetig. Zur Einhaltung der Schleifenbahn-Bedingung ist im Fall mit Reibung eine größere Starthöhe nötig, was zu einem längeren Weg s bis zum Erreichen der Schleifeneinfahrt führt als im Fall ohne Reibung. Dies macht sich in Abbildung 4 durch eine Verschiebung der Punkte D, F und H bemerkbar. Unter den gegebenen Anfangsbedingungen gilt im reibungsfreien Fall $a_r(\varphi) = 3g(1 - \sin\varphi)$. Dies entspricht dem gestrichelten Kurvenverlauf. Hierfür ist das Diagramm in Abbildung 4 unabhängig von den Bahnabmessungen und gilt sowohl für die DARDA-Bahn als auch für eine Jahrmarktsachterbahn.

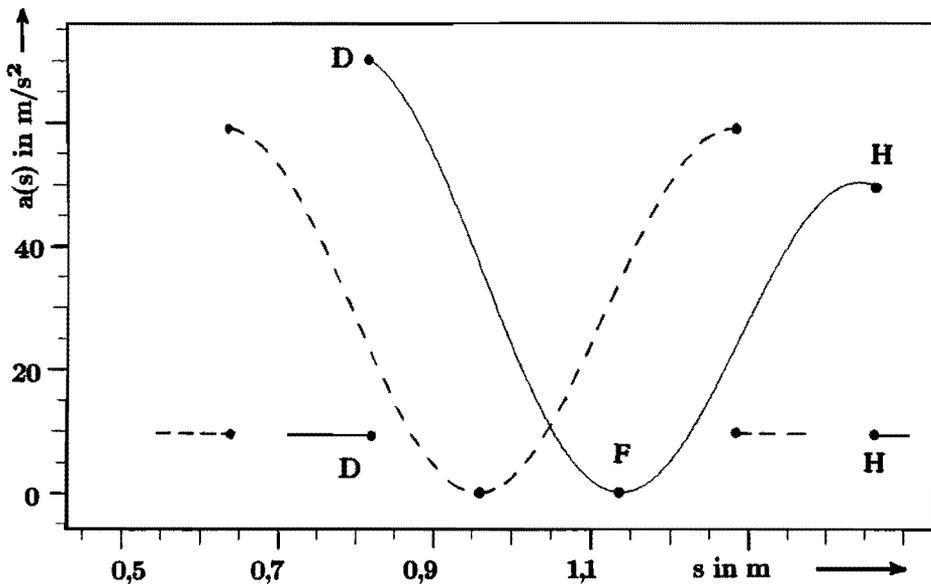


Abb. 4: Beschleunigung a_r in Abhängigkeit vom insgesamt zurückgelegten Weg s als Ergebnis der Computersimulation unter Verwendung von Gleichung 4. —: mit Reibung — —: ohne Reibung (sonst wie in Abb.3).

Das unstetige Verhalten von $a_r(s)$ ist – wie im Fall 3.3.2 – auf das abrupte „Ein- bzw. Ausschalten“ der Zentripetalkraft im Punkt D bzw. H zurückzuführen. Die sprunghafte Änderung der Radialkomponente der Beschleunigung ist jedoch wesentlich größer als die Änderung der Beschleunigungskomponente in Bewegungsrichtung (Kap. 3.3.2). In der Realität erfolgen diese sprunghaften Änderungen der Beschleunigungen – im Gegensatz zur Simulation – in einem endlichen Zeitintervall, so daß ihre Wirkung abgemildert wird. Sie sind jedoch noch so groß, daß sie für den „untrainierten“ Fahrgast einer Achterbahn sehr unangenehm sein können und ihm daher nicht zugemutet werden. Vom Blutkreislauf aus gesehen sind (nach [6]) die aus der Simulation erhaltenen Beschleunigungsänderungen allerdings noch nicht lebensgefährlich.

4.2 bei veränderlichem Krümmungsradius

Wie muß nun eine Achterbahn konstruiert sein, damit die oben beschriebenen Sprünge der Radialbeschleunigung gemindert werden und dennoch die Schleifendurchfahrt mit einem „angenehmen“ Sensationsgefühl möglich wird? Die Lösung des Problems besteht darin, die Bahn so zu formen, daß der Verlauf der Radialbeschleunigung keine Unstetigkeitsstellen mehr aufweist. Dies erreicht man durch den Trick, den Krümmungsradius vom Einfahrtspunkt der Schleifenbahn bis zum Scheitelpunkt von einem unendlich großen Wert auf den passenden, endlichen Wert kontinuierlich abnehmen zu lassen.

Gekrümmte Kurven mit veränderlichem Krümmungsradius wurden bereits von Euler genauer mathematisch untersucht. Eine von ihnen ist die sogenannte Klothoide, eine Spiralkurve, deren Krümmungsradius umgekehrt proportional zur Bogenlänge abnimmt (vgl. z. B. [5]).

Abbildung 5 belegt, daß dieser Trick in der Praxis beim Bau von Achterbahnen berücksichtigt wird. Es handelt sich um die Verkleinerung (ca. 4-fach) einer Konstruktionszeichnung für eine Jahrmarktsachterbahn. Die Zeichnung wurde uns freundlicherweise von dem für den Bau verantwortlichen Ingenieurbüro [8] zur Verfügung gestellt. Es fällt auf, daß die Bahn im auf- und absteigenden Ast aus zwei gleichartigen Klothoidenabschnitten und im oberen Teil aus einem Kreisbogensegment besteht.

Das Problem des abrupten „Einschaltens“ der Zentripetalkraft tritt im Straßenverkehr beim Einfahren in eine Kurve auf. Auch hier werden Kurven dadurch „entschärft“, daß der obige Trick mit der Klothoidenform bei der Auslegung der Kurven angewendet wird. Dies läßt sich oft auf Luftaufnahmen von Autobahnkreuzen deutlich erkennen. Die Simulation wurde auch für eine Schleife mit den Klothoidenästen gemäß Abbildung 5 mit folgenden Daten und Festsetzungen durchgeführt: Die Gesamthöhe der Schleife mit Klothoidenästen betrug 0,206 m und wurde gleich der Gesamthöhe der kreisförmigen Schleife gewählt, um die Ergebnisse für beide Schleifen leichter vergleichen zu können. Der Übergang zwischen Klothoidenabschnitt und Kreissegment im oberen Teil erfolgt dort, wo die Steigung der Tangente an die Klothoide den Wert $\tau = 104,3^\circ$ bzw. $\tau = 255,7^\circ$ beträgt (s. Abb. 5). Im übrigen wurde der Rest der Bahn so belassen, wie sie in Abbildung 1 b dargestellt ist.

Zur mathematischen Beschreibung der Klothoidenabschnitte wurde folgende, in [8] angegebene Näherung für die Parameterdarstellung der Klothoide verwendet:

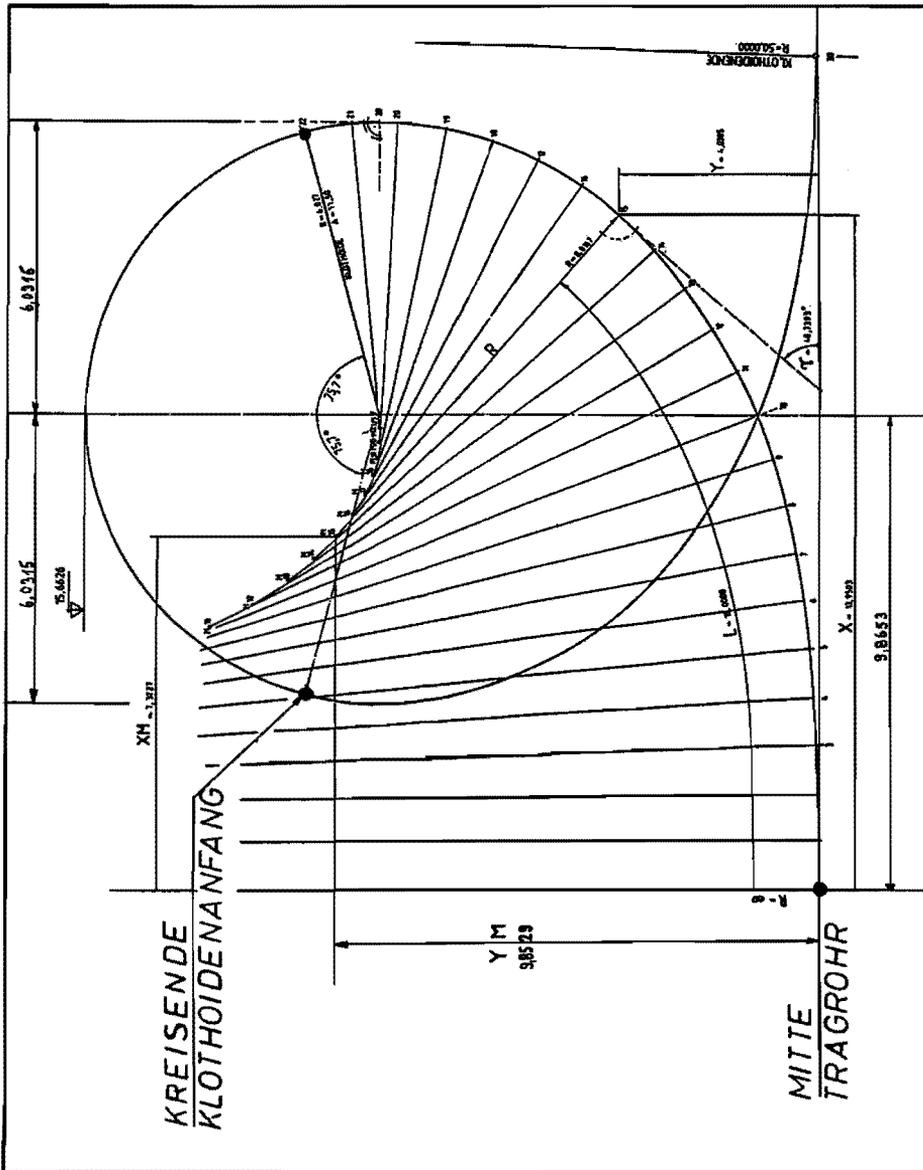


Abb. 5: Originalkonstruktionszeichnung für eine Achterbahn mit Klothoidenästen und Kreissegment im oberen Teil (ca. 4-fach verkleinert). Durch die Verkleinerung bedingt sind einige der angegebenen Zahlen nicht mehr lesbar. Sie sind für die Simulation nicht wichtig, so daß wir im Interesse der Authentizität der Zeichnung auf eine Nachbesserung verzichtet haben.

$$\begin{aligned}
 X &\approx A \sqrt{2\tau} \left\{ 1 - \frac{\tau^2}{2! \cdot 5} + \frac{\tau^4}{4! \cdot 9} - \frac{\tau^6}{6! \cdot 13} + \frac{\tau^8}{8! \cdot 17} \right\}; \\
 Y &\approx A \sqrt{2\tau} \left\{ \frac{\tau}{1! \cdot 3} - \frac{\tau^3}{3! \cdot 7} + \frac{\tau^5}{5! \cdot 11} - \frac{\tau^7}{7! \cdot 15} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

und den Kenngrößen: $L = A^2/R$; $\tau = L^2/(2A^2)$; $R = A/\sqrt{2\tau}$;
 $X_M = X - R \sin \tau$; $Y_M = Y + R \cos \tau$;

- mit: τ : Steigung der Tangente im Punkt P der Klothoide.
 R : Krümmungsradius der Klothoide im Punkt P.
 L : Länge des Klothoidenabschnitts vom Koordinatenursprung ($\tau = 0$) bis zum Punkt P.
 X_M, Y_M : Mittelpunkt des zum Punkt P gehörenden Krümmungsradius der Klothoide.
 A^2 : Proportionalitätsfaktor zwischen L und R^{-1} . $A^2 = 0,0272 \text{ m}^2$ für die in der Simulation vorgegebenen Abmessungen; A läßt sich aus den Kenngrößen der Klothoide mit der Bedingung $Y_M(\tau) + R(\tau) = 0,206 \text{ m}$ (Gesamthöhe der Schleife) für $\tau = 104,3^\circ$ (Übergang zum kreisförmigen Segment) berechnen.

Für den durch die Bahndaten festgelegten Wert von A^2 ergibt sich für den Radius des Kreissegments im oberen Teil der Schleifenbahn $r' = 0,086 \text{ m}$. Im Fall der kreisförmigen Schleifenbahn ist $r' = 0,103 \text{ m}$. Hieraus folgt, daß bei der Schleifenbahn mit Klothoidenabschnitten – verglichen mit der kreisförmigen Schleifenbahn – bereits eine geringere Geschwindigkeit und damit eine geringere Starthöhe ausreicht, um bei sonst gleichen Parametern die Schleifenbahn-Bedingung zu erfüllen. Dies ist ein weiterer Vorteil der Klothoidenform. Die Simulation liefert für die neue Starthöhe den Wert $0,249 \text{ m}$ – für die kreisförmige Schleifenbahn beträgt er $0,258 \text{ m}$.

Ferner liefert die Simulation im Fall mit Reibung für $a_r(s)$ den in Abbildung 6 dargestellten Verlauf, wobei s wieder auf den Startpunkt A bezogen ist. Man erkennt, daß der Einbau der Klothoidenäste den gewünschten Erfolg zeigt. Ausgehend von $a_r(s) = g$ im Abschnitt CD steigt $a_r(s)$ nach dem Passieren von D jetzt stetig an. Insgesamt ändert sich die Beschleunigung maximal nur noch um $4g$.

Unter Berücksichtigung der Reibung liefert die Simulation für die Klothoidenbahn eine Starthöhe von $h_0 = 0,378 \text{ m}$. Relativ zur Anfangsenergie beträgt der Reibungsverlust $39,8\%$ (für $\mu = 0,055$). Er ist damit für die Klothoidenbahn – trotz größerer Bahnlänge – kleiner als im Fall der kreisförmigen Schleifenbahn, bei der der Verlust 45% beträgt (Starthöhe $h_0 = 0,378 \text{ m}$).

Ein weiterer Vorteil der DARDA-Bahn besteht darin, auch angenähert Klothoidenabschnitte nachbilden zu können und damit die Vorhersagen der Simulation überprüfen zu können. Hierzu ist ein Meßverfahren, wie es das ORVICO-System [9] darstellt, bestens geeignet. Mit einer Fernsehkamera wird bei diesem Verfahren ein an dem Auto befestigter heller Punkt aufgezeichnet, und mit einem Computer können die jeweiligen Ortskoordinaten des Punktes bei einer geeigneten Auswertung des Fernsehbildes bestimmt werden. Man erhält so alle für die Bewegung relevanten Daten. Wir planen entsprechende Messungen durchzuführen.

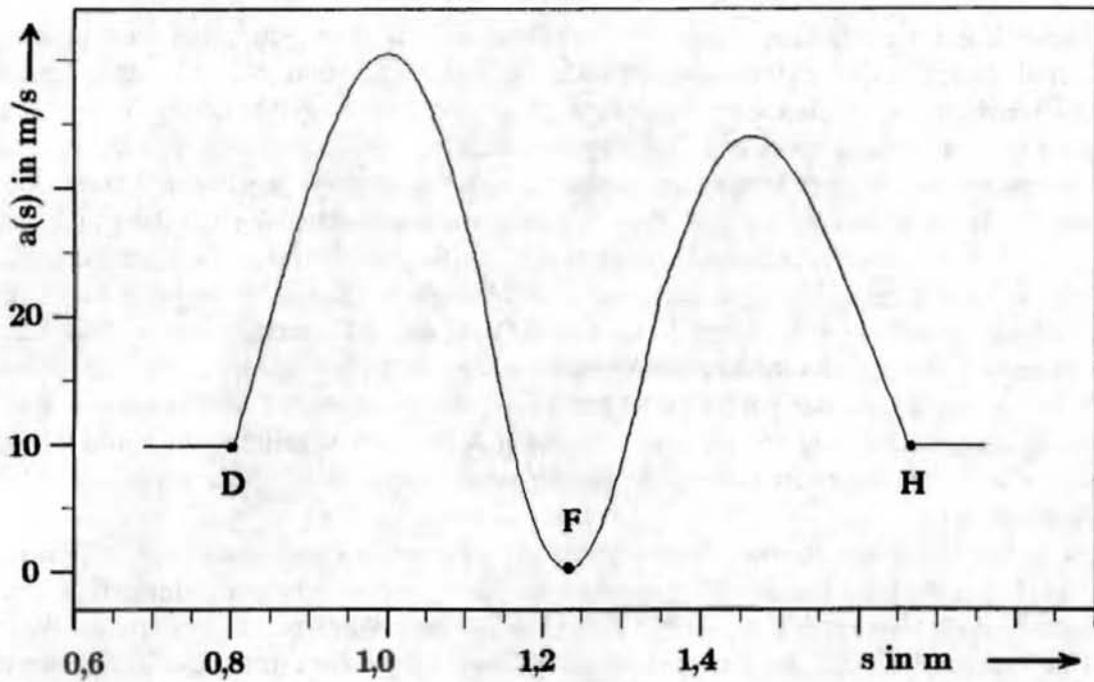


Abb. 6: $a_r(s)$ als Ergebnis der Computersimulation für eine durch den Einbau von Klothoidenästen modifizierte Schleife gemäß Abb. 5 für den Fall mit Reibung; Bezeichnungen wie in Abb. 4.

5. Zum Einfluß der Bahnkraft bei einer DARDA-Doppelschleife

Die Computersimulation hat gezeigt, daß die Reibung eine wichtige Rolle bei einer Schleifenfahrt spielt. Ein anderer Aspekt der Reibung, der bei der Verwendung eines DARDA-Autos mit Antrieb zusätzlich auftritt, läßt sich folgendermaßen eindrucksvoll demonstrieren. Hierzu dient die in Abbildung 7 gezeigte Doppelschleifenbahn.

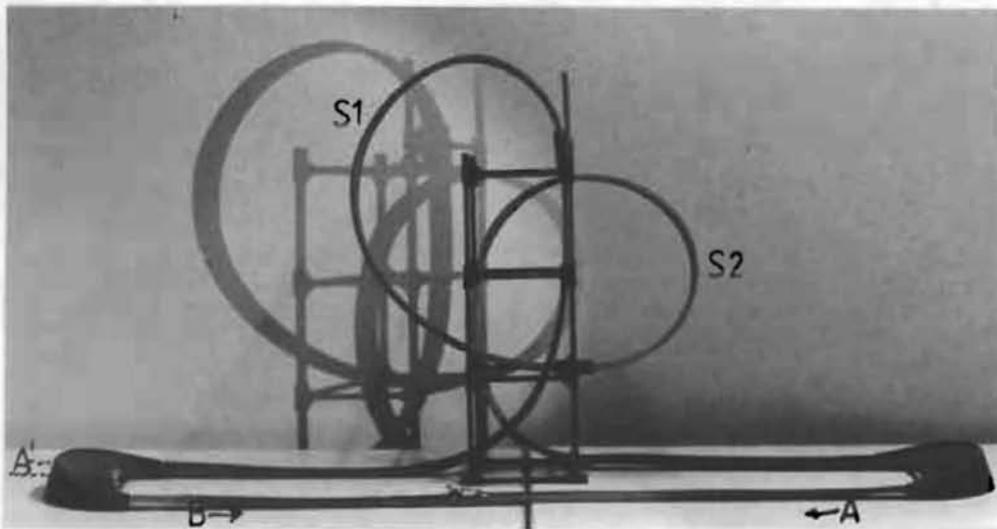


Abb. 7: Fotografie der DARDA-Bahn mit Doppelschleife (Erläuterungen im Text).

Diese Bahn besteht aus einer horizontalen, ovalen Rennbahn, bei der in einem Geradenstück zwei aufeinanderfolgende Schleifen S1 und S2 mit unterschiedlichen Krümmungsradien eingebaut sind. Zusätzlich sind in Abbildung 7 drei Startpunkte A, A' und B markiert. Die Pfeile deuten die im Experiment gewählten Startrichtungen an. A und B sind so gewählt, daß bei der vorgegebenen Fahrtrichtung der bis zur Einfahrt in die jeweilige Schleife zurückgelegte Weg (ca. 2m) und damit die erreichte Geschwindigkeit gleich sind. A' liegt auf einem Geradenstück, das, wie in Abbildung 7 angedeutet, noch nachträglich eingebaut werden kann. Der Abstand zwischen A' und der Schleifeneinfahrt von S1 beträgt ca. 4m. Ein von A gestarteter Wagen durchfährt zunächst das Steilstück der Schleife S1 mit großem Krümmungsradius, der bei B gestartete zuerst die Schleife S2 mit kleinerem Krümmungsradius. Die Wegstrecke vom Startpunkt A bis zum Scheitelpunkt von S1 (höchster Punkt der Bahn) ist kürzer als die Wegstrecke von B bis zum Scheitelpunkt der Schleife S1.

Berücksichtigt man Reibungsverluste, so ist zu erwarten, daß für einen im Punkt A gestarteten Wagen (kürzere Wegstrecke) die Energie eher ausreicht, um den Scheitelpunkt von S1 zu erreichen, als für den in B (längere Wegstrecke) gestarteten Wagen. Überraschend ist, daß das Experiment diese Erwartung nicht erfüllt. Der in A gestartete Wagen fällt im oberen Bereich der zuerst durchfahrenen Schleife S1 aus der Bahn, während der in B gestartete beide Schleifen vollständig durchfährt.

Diese Beobachtungen stehen scheinbar im Widerspruch dazu, daß die Hubarbeit bei Vernachlässigung der Reibung wegunabhängig ist. Berücksichtigt man die Reibung, so ist die Hubarbeit zwar wegababhängig, sie sollte sich jedoch auf dem kürzeren Weg weniger stark bemerkbar machen. Zur Lösung dieses Widerspruchs benötigt man die Information, daß zur vollständigen Umwandlung der Spannenergie der Feder eine Strecke von mindestens 4m benötigt wird, wie durch Versuche auf einer geraden, horizontalen Bahn festgestellt wurde. Bis zur Einfahrt in die jeweilige Schleife hat der Wagen allerdings erst ca. 2m zurückgelegt, so daß der Wagen in der Schleife immer noch beschleunigt wird. Dabei ist zu beachten, daß der Wirkungsgrad für die Umwandlung von Spannenergie in Bewegungsenergie wesentlich durch die Haftreibung der Räder auf der Bahn bestimmt wird. Bei dieser Energieumwandlung spielt offensichtlich die Reihenfolge beim Durchfahren der Schleifen eine Rolle. Im Steilstück von S1 ist der Krümmungsradius größer als in S2. Daher ist die Bahnkraft und somit die Haftreibung in S1 kleiner als in S2. Dem in B startenden, zuerst durch S2 fahrenden Wagen kann somit auf seinem Weg mehr Energie zugeführt als dem in A startenden, zuerst durch S1 fahrenden Wagen. Der Versuch zeigt, daß die von A aus erreichte Geschwindigkeit beim Durchfahren von S1 für die Erfüllung der Schleifenbahnbedingung nicht ausreicht, so daß er herunterfällt.

Zur experimentellen Bestätigung obiger Überlegungen wird in einem zweiten Versuch dem DARDA-Auto eine genügend lange, geradlinige Strecke vor der Einfahrt in das Steilstück S1 zur Verfügung gestellt. Hierzu wird die Bahn aufgetrennt und in Richtung A' ein Geradenabschnitt der Länge 4m eingefügt. Startet man jetzt bei A', so durchfährt das Auto die beiden Schleifen in der Reihenfolge S1, S2 auch vollständig.

6. Zusammenfassung

Am Beispiel der Schleifenfahrt wird gezeigt, daß ein Spielzeug, die DARDA-Bahn, sich hervorragend zur Behandlung verschiedener Teilgebiete der Mechanik, wie z.B. Energieerhaltung, Reibung und Kreisbewegung eignet. Durch die Flexibilität im Aufbau und durch die Verbreitung bei Schülern kann sie Ausgangspunkt für eigene Forschungen zur Bewegungslehre darstellen. Hierzu könnte auch die Untersuchung des Einflusses der Rotationsenergie auf die Bewegung [7] zählen. Außerdem bietet sie die Möglichkeit, den Bezug zu alltagsrelevanten Themen herzustellen wie etwa die Gestaltung von Autobahnauffahrten oder von Achterbahnschleifen, bei denen die Ein- oder Ausfahrt ohne große Beschleunigungssprünge erfolgen muß.

Die vorgestellten Ideen wurden im Physikunterricht der 11.Klasse am Gymnasium erprobt. Einzelne Aspekte können auch – zumindest auf einem qualitativen Anspruchsniveau – in der Mittelstufe des Gymnasiums und an der Realschule behandelt werden. Bei aller Begeisterung, die wir beim Einsatz der DARDA-Bahn spürten, möchten wir jedoch davon abraten, die Bewegungslehre nur noch mit der DARDA-Bahn durchzuführen. Auch hier sollte die Maxime gelten, daß Versuchsanordnungen, die in mehr als zwei aufeinanderfolgenden Stunden eingesetzt werden, zur Langeweile führen können, auch wenn es sich um ein anfänglich so interessantes Versuchsgerät handelt.

(Anschrift der Verfasser: OStR Jürgen Becker, Emmy-Noether-Gymnasium in Erlangen, Noether-Str. 49b, 91058 Erlangen. Stud.Ref.Dipl.Phys. Matthias Hegner, Prof.Dr.Werner B. Schneider, Didaktik der Physik, Physikalisches Institut der Universität Erlangen-Nürnberg, Staudtstr. 7, 91058 Erlangen)

Eingangsdatum: 15.1.1992

Literatur

- [1] Die DARDA-Bahn, Helmut Darda GmbH, D-78176 Blumberg
- [2] Bürger, W.: „Kleine Flitzer – Akrobaten auf der Spielzeugautobahn“, Akademiebericht Nr. 98, Spielzeug-Physik, Dillingen 1986, S.133–138
- [3] Berge, O.E.: „Spielzeug im Physikunterricht“, Quelle und Meyer Verlag, Heidelberg 1982, S.51–69
- [4] Cavelius, E.: „Experimente zur Energieerhaltung und Zentrifugalkraft an einer einfachen Fahrbahn“, Praxis der Naturwissenschaften Physik; 10 (1979) S.258–260
- [5] Bronstein Semendjajew, „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch Thun u. Frankfurt/Main 1989, S.95
- [6] Vogt L.H.: „Physiological Effects of sustained Acceleration, Life Sciences and Space Research“, Akademie Verlag Berlin 1976, S.77–90
- [7] Peter L. Tea, Jr.: „Trouble on the loop-the-loop“, Am.J.Phys. 55 (1987) S.826–829
- [8] Werner Stengel: Ing.-Büro Nesselwanger Straße 24, 81476 München, Konstruktionsunterlagen für eine Achterbahnschleife
- [9] Roman Dengler, „ORVICO – Moderne Methode zum Erfassen, Darstellen und Auswerten von Bewegungsabläufen“, Dissertation, München 1989